LE TEMPS EN RELATIVITÉ

JEAN-PHILIPPE UZAN

INSTITUT D'ASTROPHYSIQUE DE PARIS

ENSTA 26 OCTOBRE 2006

Ce document comporte plus d'information que mon séminaire. J'espère que cela vous sera utile.

Attention: ces notes ne sont pas à considérer comme un texte lissé mais comme une aide rappelant les grandes lignes de mon exposé. Elles ne sont donc pas complètement rédigées.

Le programme...

1- Le temps et l’espace de la physique newtonienne

2- L’espace-temps de la relativité restreinte

3- Les espace-temps de relativité générale

4- Temps et cosmologie

Ce séminaire ne vise pas à donner un exposé complet sur la représentation du temps et des espace-temps en relativité. Mon but est de fournir des éclairages sur certaines descriptions et propriétés du temps et de comparer sa représentation en physique newtonienne et relativiste.

Nous avons une notion intuitive de l’espace et du temps, associée respectivement à un espace de dimension 3 et à un espace de dimension 1.

Afin de formaliser ces concepts, nous allons leur attribuer des structures mathématiques. Nous avons vite fait d’assimiler ces structures à l’espace et aux temps eux-mêmes. Nous essaierons autant que faire se peut de conserver cette distinction.

Afin de mieux comprendre l’apport des relativités, je vais commencer par rappeler la structure et les propriétés de l’espace et du temps newtonien. Nous verrons en effet que la relativité restreinte nous oblige à unir ces deux concepts en un seul, l’espace-temps. Il est donc vain d’essayer de parler de l’un sans considérer l’autre.

La relativité générale nous apprendra ensuite que l’on ne peut pas considérer l’espace-temps sans prendre en compte la gravitation.

A chacune de ces étapes, j’exposerai les structures mathématiques que l’on associe à cet espace-temps en essayant d’expliquer pourquoi nous avons été obligé de changer de conception. Dans le cadre de la relativité je mettrai l’accent sur la notion de causalité et sur les propriétés globales des espaces-temps.

Pour finir, je ferai une allusion à la cosmologie.

L’espace et temps de la physique newtonienne

Les structures de l’espace et du temps de la physique de Newton sont bien connues et largement utilisées, en particulier en classes préparatoires. Mon but n’est donc pas de faire un exposé détaillé mais plutôt de rappeler un point de référence concernant la description de l’espace et du temps.

Je m’inspire ici de la Ref. 1 qui traite de la physique newtonienne en utilisant les outils de la géométrie différentielle.

1- L'espace et le temps de Newton

« Les termes (...) de *temps*, d'*espace*, de *lieu* & de *mouvement* sont connus de tout le monde ; mais il faut remarquer que pour n'avoir considéré ces quantités que par leurs relations à des choses sensibles, on est tombé dans plusieurs erreurs. Pour les éviter il faut distinguer le temps, l'espace, le lieu & le mouvement, en *absolus* & *relatifs, vrais* & *apparens, mathématiques* & *vulgaires.* »

Isaac Newton, in *Principia*, Londres, 1687
Traduction de la Marquise du Châtelet, Paris, 1759

« Le temps absolu, vrai et mathématique, qui est sans relation à quoi que ce soit d'extérieur, en lui-même et de sa nature coule uniformément ; on l'appelle aussi « durée. »

Isaac Newton, in *Principia*, Londres, 1687

Commençons par rappeler les définitions de l'espace et du temps données par Newton dans l'ouverture de ses Principia.

Ces définitions mettent en relief que la construction théorique, même dans le cadre newtonien, se doit de distinguer ses objets (des objets mathématiques) des notions sensibles. Newton distingue bien les objets mathématiques des objets sensibles et nous met en garde sur les erreurs qui peuvent survenir en les identifiant trop rapidement.

1- L'ESPACE DE NEWTON

« L'espace absolu, qui est sans relation à quoi que ce soit d'extérieur, de par sa nature demeure toujours semblable et immobile. »

En physique newtonienne espace et lieux « relatifs, apparents et vulgaires » sont représentés par un ensemble mathématique de *points* appelé *espace absolu*. Chaque point est caractérisé par un triplet de nombres réels, ses *coordonnées*, qui définissent sa *position*.

La physique newtonienne postule aussi que, parmi tous les étiquetages possibles, il en est, appelés *systèmes de coordonnées cartésiennes*, tels que la *distance* r_{12} entre deux points, de coordonnées cartésiennes X_1^α et X_2^α ($\alpha = 1,2$ ou 3), est définie par le « théorème de Pythagore » : $r_{12} = \sqrt{\sum_\alpha (X_2^\alpha - X_1^\alpha)^2}$.

L'espace ainsi défini est *euclidien*.

L'*élément de longueur*, c'est-à-dire le carré de la distance $dl(\geqslant 0)$, entre deux points infiniment voisins de coordonnées cartésiennes X^α et $X^\alpha + dX^\alpha$, qui permet de mesurer les longueurs des courbes et de démontrer toutes les propriétés métriques des figures, est ainsi donné par

$$dl^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha\beta}\, dX^\alpha dX^\beta \equiv \delta_{\alpha\beta}\, dX^\alpha dX^\beta \,.$$

Commençons par l'espace absolu. Sa définition se base sur le fait qu'il est immuable mais elle ne nous dit pas qu'elle est la nature de cet espace.

Dans la pratique, l'espace est représenté par un ensemble de points. Chaque point est étiqueté par un triplet de nombres (c'est donc un espace de dimension 3) et on postule qu'il existe un système de coordonnées cartésiennes global. Il s'agit donc d'un espace euclidien de dimension 3.

Le théorème de Pythagore permet de calculer l'élément de longueur entre deux points proches.

Remarquons que ces définitions ne disent rien sur la topologie globale de cet espace. On sait aujourd'hui qu'il existe, en dimension 3, 18 espaces euclidiens différents. (6 espaces sont compacts et orientables; 4 sont compacts et non-orientables; 8 sont non compacts) (voir le chapitre 12 de la Ref. 7).

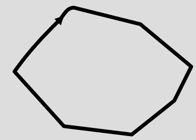
1- Le temps de Newton

Le temps « apparent » est quant à lui représenté par un nombre réel, le *temps absolu* que l'on associe à chaque point de l'espace absolu.

Le temps est décrit par une variable mathématique continue à **une** dimension

- On a donc deux possibilités:

ou



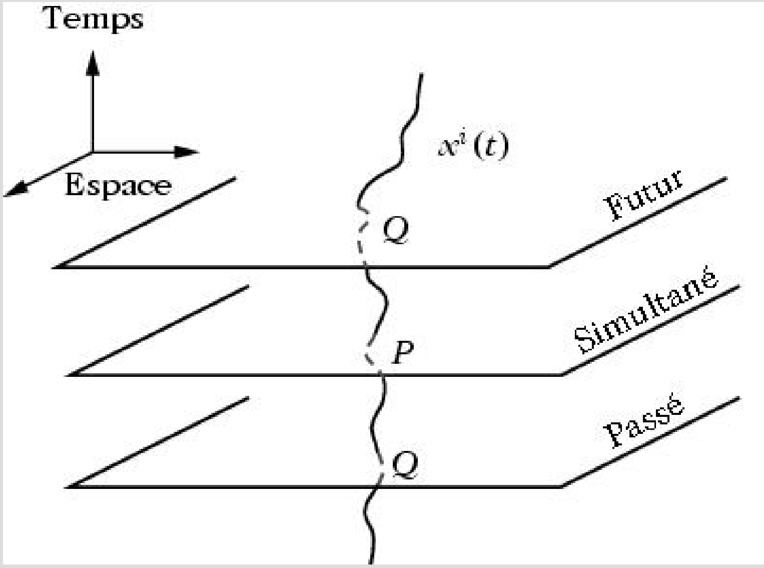
On peut ainsi introduire l'*espace-temps* de Newton, N_4, comme un « feuilletage », ou *fibré*, c'est-à-dire une succession de copies de l'espace absolu $\mathcal{E}_3$ et de son repère cartésien, « paginées » en ordre croissant par le temps t : $N_4 = \mathcal{E}_3 \times R$ où R est l'ensemble des nombres réels. Chaque point de $\mathcal{E}_3$ devient alors une « fibre » de N_4 représentant un point au *repos absolu* et dans ce contexte cinématique l'ensemble des repères cartésiens indexés par t prend le nom de *repère absolu*.

Le temps est représenté par un espace mathématique continu à une dimension. A une dimension, il existe seulement deux espaces de topologie différente possédant cette propriété: la droite (l'ensemble des réels) et le cercle.

Si on rajoute un argument de causalité (« l'effet ne peut pas précéder la cause ») alors on doit exclure le cercle si bien que le temps est représenté par l'ensemble des réels.

Ainsi, l'espace-temps de Newton est un fibré de dimension 4, que l'on peut aussi voir comme un feuilletage d'espace de dimension 3.

1- L'ESPACE ET LE TEMPS DE NEWTON



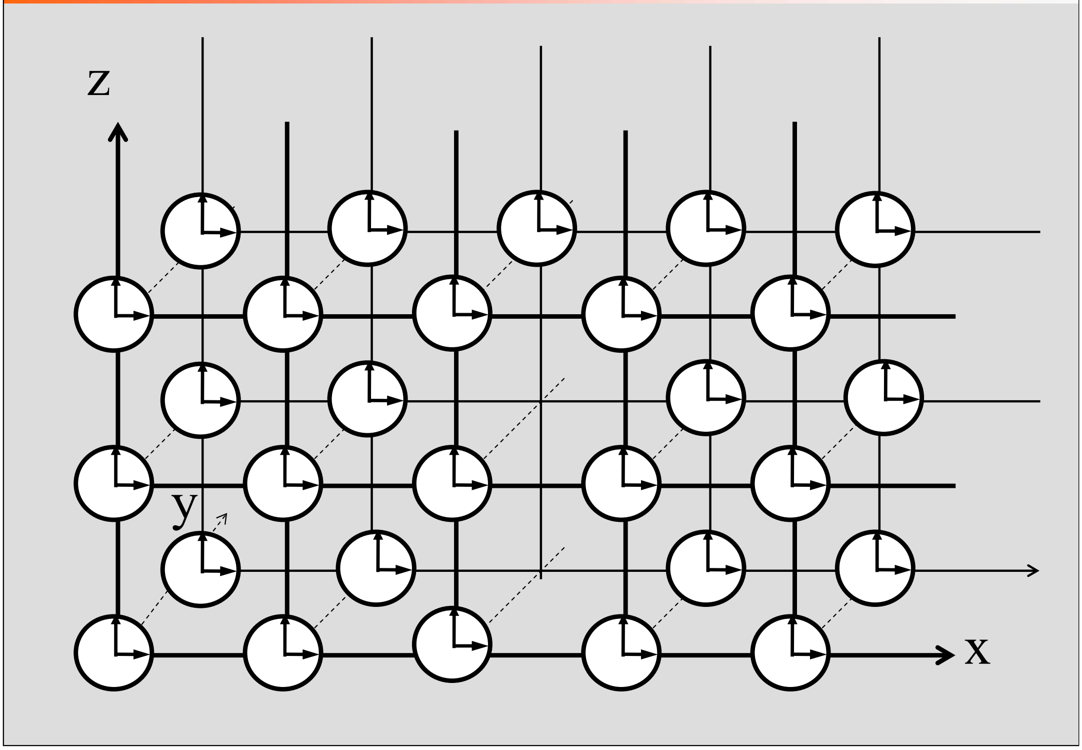
L'espace-temps de Newton a ainsi une structure causale assez simple:

- Si Q peut être relié à P par une trajectoire $X^i(t)$ telle que d $X^i(t)$ /dt < infinity, Q se trouve dans le passé de P.

- Si P peut être relié à Q par une trajectoire $X^i(t)$ telle que d $X^i(t)$ /dt < infinity, Q se trouve dans le futur de P.

- Sinon ceux sont deux événements simultanés.

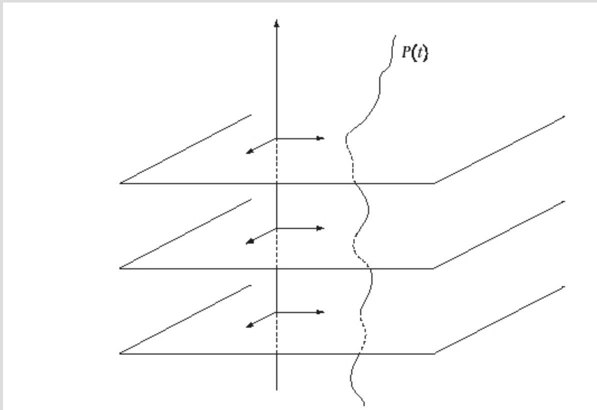
1- L'espace et le temps de Newton



Une autre façon de représenter cet espace-temps de Newton est de le visualiser comme un cristal d'horloges synchronisées.

1- L'espace et le temps de Newton

Le mouvement d'un objet matériel sans étendue et sans structure interne, appelé *point matériel* est représenté par une ligne de l'espace-temps, appelée *ligne d'univers* ou, de manière équivalente, par une *trajectoire*, à savoir une courbe de $\mathcal{E}_3 : t \in R \mapsto P(t) \in \mathcal{E}_3$ où le paramètre t est imposé être le temps absolu.



Cette structure étant définie, la trajectoire ou ligne d'univers d'un point matériel est définie comme étant une application de E_3 dans E_3. Le paramètre est imposé comme étant le temps absolu.

1- L'ESPACE ET LE TEMPS DE NEWTON

Matérialisation du repère cartésien de l'espace absolu :

- construction d'un **référentiel**
  trièdre solide

- le temps est matérialisé par une horloge, ie.
  un phénomène reproductible.

Une « **bonne** » horloge mesure, quel que soit le mouvement dont elle est affectée, des durées en conformité avec les prédictions des lois dynamiques écrites en fonction du temps absolu

Conséquence: le temps de voyage mesuré par deux observateurs empruntant des chemins différents est le même qu'elle que soit leur trajectoire.

La question est alors de savoir comment matérialiser l'espace absolu. Ceci passe par la construction d'un **référentiel**.

Concrètement il est donné par un **trièdre solide** (c-à-d. un ensemble d'objets dont les distances relatives sont constantes dans le temps). Ce trièdre est construit à partir d'instruments de mesure (règles, compas etc.…) qu'une utilisation répétée permet de qualifier de **rigides**, en utilisant le théorème de Pythagore et ses conséquences.

Ce référentiel est **bon** si à la précision des mesures toutes les propriétés euclidiennes des figures y sont vérifiées. Si ce n'est pas le cas c'est que les instruments ne sont pas vraiment rigides. **Mais** si des mesures donnent des résultats systématiquement contraires aux prédictions euclidiennes on déduira alors que la représentation de l'espace par un espace euclidien est inadéquat.

Le temps absolu est matérialisé par une **horloge**, c-à-d. un phénomène reproductible. Une bonne horloge se construit par approches successives et est définie ultimement par le fait qu'elle mesure, quel que soit le mouvement dont elle est affectée, des durées en conformité avec les prédictions des lois dynamiques écrites en fonction du temps absolu.

Le temps est ainsi matérialisé par un mouvement (spatialisation du temps) et in fine, on ne peut pas construire d'horloge sans se donner de lois du mouvements. La construction d'horloge se fait donc par approximations successives.

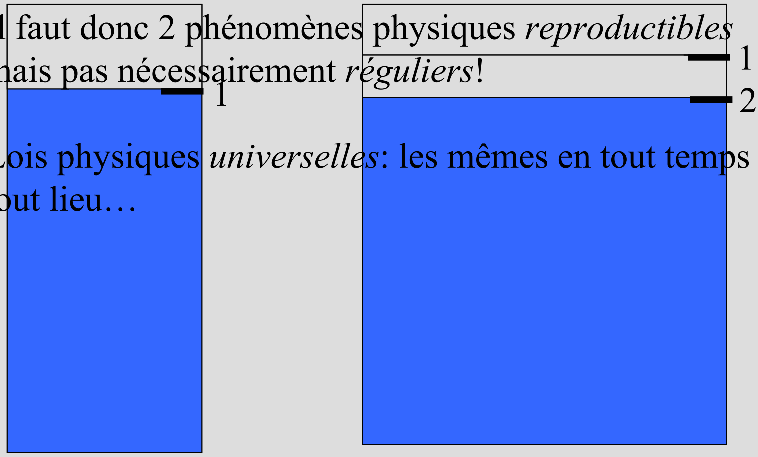
On peut alors prédire un résultat élémentaire, mais important: le temps de voyage mesuré par deux observateurs empruntant des chemins différents est le même qu'elle que soit leur trajectoire. Si ce n'était pas le cas cela signifierait a priori que les horloges ne sont pas bonnes. Si un grand nombre d'expériences donnent un résultat systématiquement différent de cette prédiction (ce qui est d'ailleurs le cas!!) on conclura que l'espace et le temps absolus de Newton ne sont pas une bonne représentation de l'espace et du temps.

1- La « première horloge »

Comment construire la première horloge?

Il faut donc 2 phénomènes physiques *reproductibles* mais pas nécessairement *réguliers*!

Lois physiques *universelles*: les mêmes en tout temps et tout lieu…



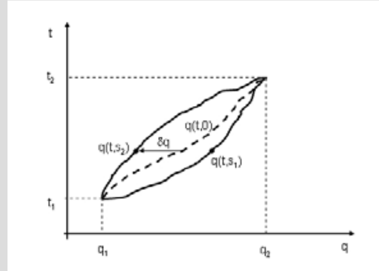
Et on continue….

Pour construire une horloge, cad un phénomène périodique, il suffit que les phénomènes physiques soient reproductibles. Ainsi en partant de conditions initiales similaires, l'évolution du système est identique.

L'exemple présenté ici montre sur l'exemple du clepsydre comment on peut construire la première horloge.

1- L'ESPACE ET LE TEMPS DE NEWTON

Principe de moindre action.



Lagrangien $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t$

Equation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Phénomène reproductible $L(q, \dot{q})$

Energie $\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)$

$$\boxed{E = -L + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}}$$

Lien profond entre:
- reproductibilité
- Lagrangien indépendant du temps
- conservation de l'énergie

Imposer que les phénomènes physiques soient reproductibles a une conséquence importante. Selon la première loi de Newton, la trajectoire représentant le mouvement d'une particule libre entre deux points est une droite, c-à-d. le chemin le plus court entre ces deux points. Dit autrement, le trajet effectivement suivi par une particule libre est celui qui minimise la longueur de tous les chemins possibles entre deux points quelconques.

Cependant, la trajectoire d'une particule soumise à une force non nulle n'est plus rectiligne et uniforme et n'extrémise donc pas la longueur. Ce fut un accomplissement des mécaniciens du XVIII^{e} de montrer que cette trajectoire pouvait s'obtenir à partir d'un principe d'extrémisation, le **principe de moindre action**.

Ce principe demande de construire une fonction, le lagrangien, et une fonctionnelle des trajectoires, l'action. L'extrémisation de l'action mène aux équations d'Euler-Lagrange dont la résolution permet d'obtenir la trajectoire.

Pour un phénomène reproductible, le Lagrangien ne dépend pas *explicitement* du temps. Dans un cas général, la dérivée par rapport au temps du lagrangien implique l'existence du quantité conservée, que l'on baptise énergie. C'est la même que la quantité que l'on peut extraire pédestrement des équations du mouvement quand la force dérive d'un potentiel.

La dérivée totale du lagrangien par rapport au temps permet de construire cette quantité conservée,en utilisant les équations d'Euler-Lagrange. Si la force dérive d'un potentiel, le lagrangien d'une particule massive est donné par L=m $v^2/2$ – W si bien que E =m $v^2/2$ + W.

Ceci n'est pas une coïncidence. On peut montrer (cf. Noether, voir Refs.1 et 9) qu'à chaque symétrie du lagrangien est associé une quantité conservée. Ici nous avons supposé que le lagrangien était invariant par les translations dans le temps si bien que la solution des équations d'Euler-Lagrange (à partir du même état initial) est la même, indépendamment du moment où cette trajectoire débute. Il s'agit bien de la notion de reproductibilité. L'invariance par translation donne la conservation de la quantité de mouvement et celle par rotation, le moment cinétique.

Nous verrons que cette relation sera beaucoup plus subtile en relativité générale et qu'il est nécessaire de généraliser le concept d'énergie (et même, cela ne sera pas toujours possible).

1- L'espace et le temps de Newton

Effectuons un changement d'étiquetage

$$X^{\alpha} \to X'^{\alpha} = R^{\alpha}_{\beta}(X^{\beta} - d^{\beta})$$

où R^{α}_{β} est une matrice de rotation et d^{β} un vecteur.

Ces transformations forment un groupe des changements de repères cartésiens qui est un groupe a *n(n+1)/2* paramètres.

<u>Principe de Copernic (1)</u>

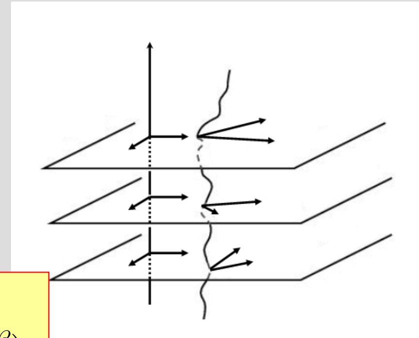
On postule que l'élément de longueur reste inchangé lorsque l'on change l'étiquetage des points. Le changement de repère cartésien le plus général s'obtient par la composition d'une rotation et d'une translation. Ces changements forment un groupe.

Ces propriétés reflètent l'isotropie et l'homogénéité de l'espace.

Ainsi, le choix de l'origine et de la direction des axes est sans importance. C'est la première facette du **principe de Copernic**. On peut en donner une autre formulation: la géométrie d'Euclide est universelle (les propriétés d'un triangle sont les mêmes quelque soit sa position dans l'espace). L'univers ne le déforme pas et est donc un **réceptacle neutre**.

Le référentiel doit par contre être au repos. On le détermine par approximations successives et ultimement par le fait que, à la précision expérimentale, les mouvements des objets matériels suivent les lois de la dynamique telles qu'elles s'écrivent dans le repère absolu. Ainsi pour des expériences peu précises les murs du laboratoire suffisent à matérialiser le repère cartésien absolu. Pour des expériences plus poussées ce n'est plus le cas (cf. e.g. pendule de Foucault…)

1- L'espace et le temps de Newton



Groupe des déplacements rigides

$$X^\alpha \to X'^\alpha = R^\alpha_\beta(t)(X^\beta - d^\beta(t))$$

$$\boxed{\begin{aligned} V'^\alpha &= R^\alpha_\beta V^\beta + \dot{R}^\alpha_\beta X^\beta - (R^\alpha_\beta d^\beta)^{\cdot} \\ a'^\alpha &= R^\alpha_\beta a^\beta + 2\dot{R}^\alpha_\beta V^\beta + \ddot{R}^\alpha_\beta X^\beta - (R^\alpha_\beta d^\beta)^{\cdot\cdot} \end{aligned}}$$

2 sous groupes sont intéressants:

- **le groupe de Milne**

  R^a_b est indépendant du temps et $d^b(t)$ quelconque.

- **le groupe galiléen**

  $d^b(t) = V_0^b t + X_0^b$

Supposons que l'on passe dans un référentiel en mouvement par rapport au référentiel absolu. On a alors une famille de repères de E3 indexés par t dont les origines et directions varient continûment dans chaque section spatiale.

Cette opération est différente du passage d'un repère cartésien à un autre car l'étiquetage dépend maintenant du temps. Mais, on continue à postuler que la distance entre deux points est la même dans chaque système. Cet ensemble de transformations forme le groupe des **déplacements rigides**.

Deux sous-groupes sont intéressants:

- le groupe de Milne qui considère les translations quelconques.

- le groupe de Galilée où la translation se réduit à un mouvement rectiligne et uniforme. C'est seulement dans cette transformation que

Les composantes de l'accélération restent invariantes.

1- L'espace et le temps de Newton

La loi de la dynamique newtonienne prend la forme

$$ma = F$$

Propriétés de la force:

- vecteur
- linéarité – superposition
- action - réaction (troisième loi de Newton)

Particule libre et relativité galiléenne

Particule en interaction:

une interaction est-elle représentée par le même vecteur dans tous les référentiels inertiels?

Principe de relativité galiléenne

L'espace absolu est doublement un fantôme

La loi du mouvement d'un point matériel P en interaction avec d'autres points matériels est donnée par la seconde loi de Newton, qui est une équation du second degré.

F est un vecteur (« absolu, vrai et mathématique ») qui représente l'interaction de P avec les autres points, soit encore la **force** (« relative, apparente et vulgaire »). Son expression est à préciser. m est la **masse inerte**. Des considérations générales permettent de préciser certaines propriétés des interactions de la physique newtonienne:

- la représentation d'une interaction par une vecteur signifie que l'on se limite aux phénomènes ne dépendant pas de la position et de l'orientation du référentiel dans lesquels on les étudie.

- l'algèbre de l'espace vectoriel des vecteurs représentant les forces est linéaire. On se limite donc aux interactions qui satisfont le principe de superposition.

- la loi d'action et de la réaction (troisième loi de Newton).

Notons que F est en fait une fonctionnelle de la ligne d'univers de P. A un instant t il dépend donc de R, v, a etc… Pour que la loi de la dynamique reste du second ordre il faut que F dépendent de R, v et a au plus. Remarquons qu'une simple dépendance en R suffit pour décrire les interactions fondamentales.

Une particule libre (F=0) suit un mouvement rectiligne et uniforme. Cette propriété devrait permettre de déterminer le système de référence absolu. Cependant si on suppose qu'une particule libre est libre dans tout référentiel, la loi de Newton n'est pas modifiée dans les transformations de Galilée (car on a toujours a=0). Sa trajectoire est donc rectiligne et uniforme dans tout référentiel inertiel (**principe d'inertie**). Ainsi si un objet libre est au repos dans un système de référence, on peut juste déduire que ce référentiel est inertiel et il est impossible de déterminer la vitesse de référentiel par rapport au référentiel absolu. Cela enlève toute pertinence à la notion d'espace absolu.

On peut concevoir que des particules soumises à des interactions permettent de le déterminer. Mais si la force prend la même expression dans tous les référentiels galiléens alors la loi de Newton prend la même forme dans tout référentiel inertiel. La question devient alors: ***une interaction est-elle représentée par le même vecteur dans tous les référentiels inertiels?*** La réponse est donnée par l'expérience et est **oui**, du moins tant que les vitesses relatives des référentiels restent faibles devant celle de la lumière. (note: force effectives simplificatrices, e.g. frottements peuvent dépendre de la vitesse)

Cette propriété est si générale qu'on l'a érigée en principe: *toutes les lois de la nature sont invariantes dans les transformations de Galilée*. Note la force de gravitation est en fait invariante dans le groupe plus large des transformations de Milne.

L'espace absolu est donc doublement un fantôme: sa structure géométrique est indépendante du contenu matériel; on ne peut l'ancrer nulle part. Il n'y a pas d'espace absolu seule la classe d'équivalence des référentiels inertiels est absolue.

Note finale: il n'existe en fait aucune particule libre à cause de la gravitation.

L'espace-temps de la relativité restreinte

Ces notions d'espace et de temps ont dominé la physique jusqu'au début du vingtième siècle. En fait la description de la lumière dans le cadre de la physique newtonienne était à l'origine de nombreux débats. Voir Ref. 2.

2- Genèse de la relativité restreinte

Contradiction entre:

1 – cinématique galiléenne,
2 – électrodynamique de Maxwell,
3 – expérience de Michelson – Morley

On doit admettre que

1 – postulats de la théorie de Maxwell ne sont pas corrects
2 – rendre compatible les deux théories,
3 – postulats de la cinématique classique ne sont pas corrects

<u>Relativité restreinte:</u>

Postulat 1: tous les référentiels inertiels sont équivalents
Postulat 2: la vitesse de la lumière est indépendante de l'état de mouvement de la source

La relativité restreinte va naître de l'apparition de contradiction entre la cinématique galiléenne et l'électrodynamique de Maxwell (et plus particulièrement la propagation de la lumière).

Pour résumer, les équations de Maxwell ne sont pas invariantes sous les transformations de Galilée. Cette non-invariance laissa espérer que l'on puisse déterminer l'espace absolu de Newton. Les physiciens abandonnèrent donc le principe de relativité et postulèrent que les équations de Maxwell étaient valable dans un seul repère, assimilé au repère absolu. La vitesse de la lumière, une onde électromagnétique comme le montra Maxwell, devait donc avoir une vitesse différente selon le mouvement de la Terre par rapport au référentiel absolu. C'est ce que l'expérience de Michelson-Morley ne mit pas en évidence. La vitesse de la lumière est la même dans tout référentiel inertiel. (voir Ref. 3 pour des détails et les textes historiques).

Einstein prit le partie de réaffirmer le principe d'équivalence et de postuler que dans tous les repères inertiels (inertiels seulement, c'est en ça que le principe est restreint), les équations de Maxwell gardent la même forme. La constante de la lumière dans le vide est alors une constante universelle (d'ailleurs on ne peut pas la considérer comme constante avant cela, voir Ref. 3).

La loi de de changement de repères inertiels ne peut donc pas être celle de Galilée.

<u>**TIPE:**</u> la nature de la vitesse de la lumière dans ce contexte est un bon sujet de TIPE.

2- Espace-temps de la relativité restreinte

Le postulat 2 remet en cause la cinématique galiléenne:

« $v + c = c$ » pour toute vitesse v !

Il remet aussi en cause la structure du temps de Newton:

- temps absolu
- durées indépendantes de l'état de mouvement de l'observateur
- notion de simultanéité

Ainsi, en réaffirmant le principe de relativité, Einstein remet en cause l'invariance galiléenne de la physique (et donc la cinématique des corps).

La composition des mouvements inertiels doit donc former un groupe avec un élément absorbant. La loi de transformation est donnée par les transformations de Lorentz qui se réduisent à celles de Galilée dans la limite des faibles vitesses. Formellement, le passage de la relativité restreinte à la cinématique newtonienne s'obtient en faisant tendre la vitesse de la lumière vers l'infini.

Ceci a quelques conséquences que nous pouvons décrire de façon intuitive.

2- IMPLICATION D'UNE VITESSE MAXIMUM

(1) Il existe un élément neutre: $u \oplus 0 = u$

(2) Il existe un élément absorbant: $u \oplus c = u$

(3) La loi est associative: $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$

(4) Les dérivées $\frac{d}{du}(u \oplus v)$ doivent exister et être continues

(5) positivité $\frac{d}{du}(u \oplus v) > 0$

On peut alors construire une fonction différentiable monotone

$$f(u \oplus v) = f(u) + f(v)$$

On en déduit $u \oplus v = f^{-1}\{f(u) + f(v)\}$

En particulier $u \oplus v = \frac{u+v}{1+uv/c^2}$ mais ce n'est pas la seule!

$$u = c \tanh \phi$$

L'existence d'une vitesse maximum peut sembler contre-intuitive mais elle signale seulement que les vitesses ne sont pas additive (au sens de l'addition de vecteur). Elles doivent donc suivre une autre loi de composition.

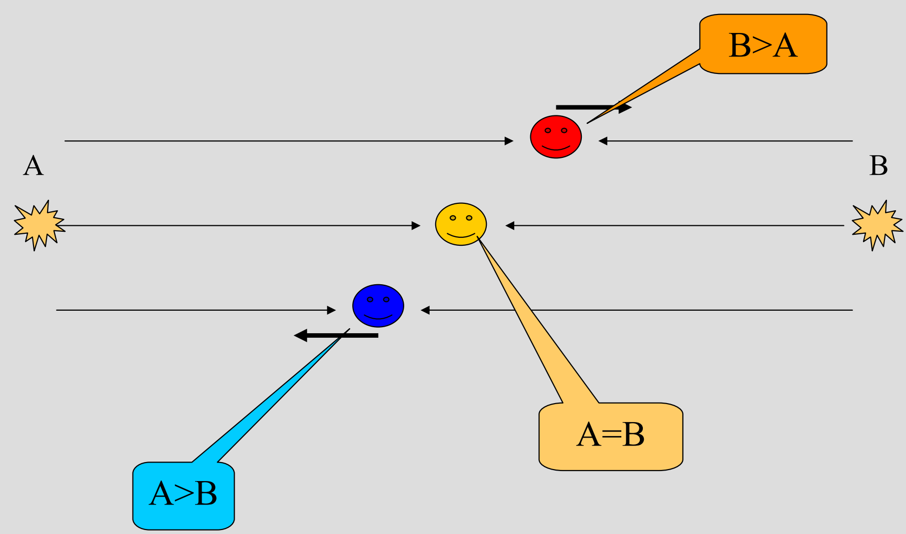
On peut construire cette loi de composition à partir de considérations générales. Sous ces conditions, on peut montrer que l'on peut toujours construire une fonction différentiable monotone f(u) qui satisfait à une règle de composition additive. f(u) n'et biensur pas la vitesse mais une quantité reliée (par exemple la rapidité). Une rapidité nulle correspond à une vitesse nulle mais une rapidité infinie correspond à la vitesse universelle.

Parmi toutes les possibilités, il y a la loi de composition de la relativité restreinte. Elle est particulièrement simple mais ce n'est pas la seule. On peut essayer de justifier cette forme en imposant d'autres conditions ``naturelles'' (voir Whittaker, From Euclid to Eddington, Cambridge university press, 1948 ou Dover 1958).

Cette loi de composition des vitesses à la (bonne) propriété de redonner la loi galiléenne à faible vitesse. Cet exemple illustre le fait que l'on peut extraire les lois de la relativité restreinte de principes premiers simples. (Voir la remarquable ref. 6).

Inutile de souligner que le chemin historique ne fut pas celui-ci!

2- Implication: simultanéité

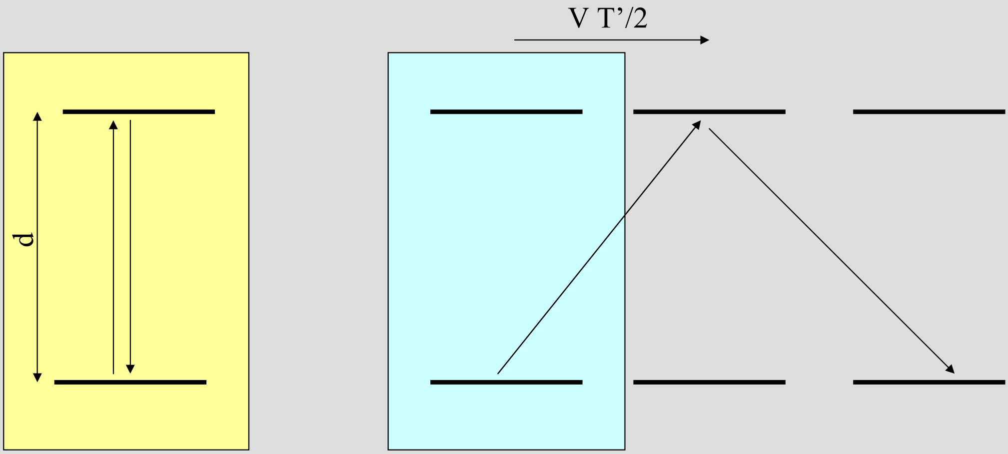


Le fait que la vitesse de propagation de la lumière soit finie et la même dans tout référentiel implique que la notion de simultanéité newtonienne ne fait plus sens.

Le concept de temps absolu et la structure causale (passé-présent-futur) de la physique newtonienne n'est plus adéquat à décrire notre espace-temps.

2- Implication: dilatation du temps

$$T = 2d/c \qquad\qquad T' = 2\sqrt{d^2 + (VT'/2)^2}\,/c$$



$$T' = T/\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

Les fréquences de deux horloges identiques, l’une au repos et la seconde en mouvement rectiligne et uniforme à la vitesse V, diffèrent. On peut retrouver la relation de dilatation du temps sur un petit modèle matérialisant l’horloge par deux miroirs entre lesquels oscille un photon.

2- Confirmations

Muons :

durée de vie dans référentiel propre: 2,2 µs

durée de vie au CERN (v/c=0,9994): 63 µs

Horloges atomiques :

J. Hafele et R. Keating, 1971: retard de 59 milliardièmes de secondes de l'horloge embarquée dans un avion.

Cette dilatation du temps a été confirmée par différentes expériences. (cf. exposé de C. Salomon)

2- Espace-temps de la relativité restreinte

En relativité restreinte, on **postule** que lieux et instants, ou événements, sont représentés par un ensemble de points p, *{p}*=M_4, **l'espace-temps absolu**.

M_4 est postulé *pseudo-euclidien*.

La distance entre deux événements es donné par un théorème de Pythagore généralisé

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\,(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 \\ &= \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \end{aligned}$$

Ceci définit la **métrique de Minkowski**

$t \equiv X^0/c$ est le *temps-coordonnée*

Tout comme nous l'avons fait en physique newtonienne, nous allons postuler une représentation mathématique de l'espace-temps.

Remarque: l'intégration de l'espace et du temps en un même concept n'a pas abolit les notions d'espace et de temps, mais seulement le fait qu'ils étaient indépendants.

2- Espace-temps de la relativité restreinte

L’intervalle ds^2 entre P et P+dP est

- de genre *lumière* si $ds^2=0$
  (un rayon lumineux peut se propager d’un point à l’autre)
- de genre *temps* si $ds^2<0$
  (on peut aller d’un point à l’autre à une vitesse $v<c$)
- de genre *espace* si $ds^2>0$
  (on ne peut pas aller d’un point à l’autre à une vitesse $v<c$)

L’intervalle entre deux points est un **invariant.**

D’un référentiel à l’autre son expression en fonction des coordonnées peut changer mais il a la même valeur

On peut alors distinguer trois sortes d’intervalles.

Le point important est que cet intervalle est un invariant. Deux événements seront donc de genre temps ou espace dans tout référentiel inertiel si ils le sont dans l’un d’entre eux.

2- CINÉMATIQUE

Un point = un événement

Ligne d'univers $p = p(\lambda)$

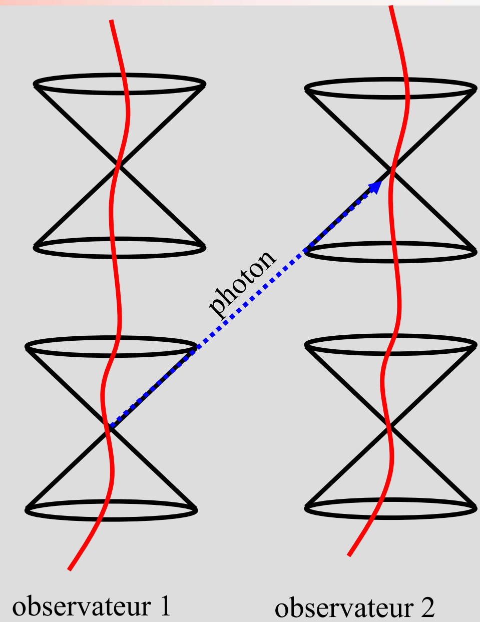
Sa tangente en p est $u = \frac{dp}{d\lambda}$
de composante $U^\alpha = \frac{dX^\alpha}{d\lambda}$

On postule que la ligne d'univers est du genre temps

$$\eta_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = \frac{ds^2}{d\lambda^2} < 0$$

On peut alors choisir $\lambda = \tau$ tel que

$$\eta_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = -\,c^2$$



Un point de l'espace-temps de Minkowski représente un événement. Chaque observateur est associé à une ligne d'univers.

Nous supposerons que le vecteur tangent à la ligne d'univers, la 4-vitesse, est du genre temps. Remarquons que le cône de lumière est dans l'espace physique le lieu des événements pouvant être relié par un rayon lumineux et qu'il a un pendant dans l'espace tangent. Ces deux structures ``s'identifient''' dans un espace plat, mais il est important de les distinguer (pour la suite!!)

On peut choisir le paramètre affine le long de la ligne d'univers comme étant l'abscisse curviligne,ce qui revient à normaliser la 4-vitesse.

2- Espace-temps de la relativité restreinte

Si on définit la 3 vitesse selon $V^i = \frac{dX^i}{dt}$

alors la condition de normalisation impose que

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + V^2 dt^2$$

On en déduit la relation entre la longueur de la ligne d'univers et le temps coordonnées:

$$d\tau^2 = \left(1 - V^2/c^2\right) dt^2$$

et les composantes de la 4 vitesse

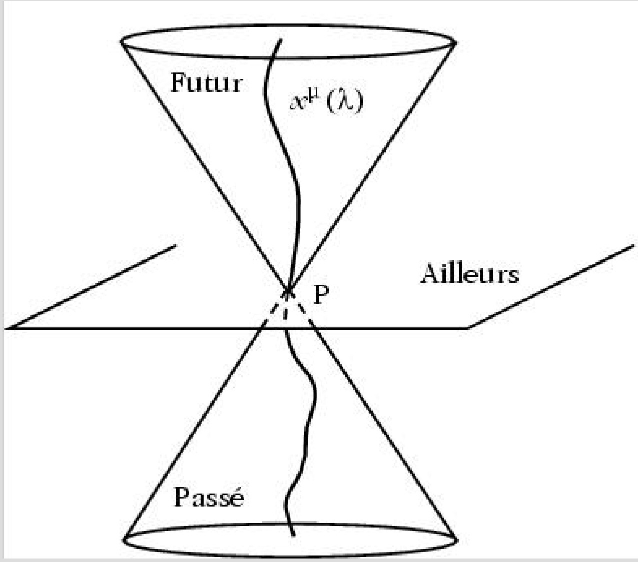
$$U^0 = \frac{c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \qquad U^i = \frac{V^i}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

On peut alors définir une 3-vitesse (la vitesse au sens ordinaire, c-à-d. la variation des coordonnées spatiales par rapport au temps-coordonnées).

Le choix de la normalisation de la 4-vitesse nous mène à une relation similaire à celle de la dilatation du temps.

Les formules pour les composantes de la 4-vitesse n'ont un sens que si la vitesse est inférieure à celle de la lumière. Il s'agit donc bien de la vitesse maximale qu'un point matériel peut atteindre.

2- STRUCTURE CAUSALE



<u>Expression de la causalité</u>: v<c
« *voir loin = voir dans le passé* »

En tout point on a donc une structure causale dictée par le cône de lumière. On définit ainsi le futur et le passé de tout événement.

2- Groupe de Poincaré

L'ensemble des transformations $X^\alpha \longrightarrow X'^\alpha$
qui préservent la forme et la valeur de l'élément de longueur,

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta = \eta_{\alpha\beta} dX'^\alpha dX'^\beta$$

de sorte que les 4 axes restent orthonormés, constituent
les **transformations de Lorentz** et forment le **groupe de Poincaré**

$$X'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta (X^\beta - d^\beta) \qquad \Lambda^\alpha_\beta \Lambda^\delta_\gamma \eta_{\alpha\delta} = \eta_{\beta\gamma}$$

Il s'agit d'un groupe à **10** paramètres

Comparaison avec le cas newtonien

L'ensemble des transformations qui préservent la forme et la valeur de l'élément de longueur, de sorte que les 4 axes restent orthonormés, constituent les transformations de Lorentz et forment le groupe de Poincaré.

Il s'agit d'un groupe à 10 paramètres.

En physique nous avions du distinguer les changements de repère cartésien et changement de repère inertiel (définis par le groupe de Galilée). En relativité restreinte ces notions se confondent, du fait que le temps y a un statut de coordonnée. Ainsi les transformations de lorentz incluent les rotations et translations des axes de coordonnées (indépendantes du temps) mais aussi la loi de passage du repère absolu à un repère inertiel.

2- Transformations de Lorentz spéciales

La loi de passage du repère absolu S à un repère inertiel S' en translation uniforme est

$$x'^0 = x^0 \cosh\phi - x^1 \sinh\phi$$
$$x'^1 = x^1 \cosh\phi - x^0 \sinh\phi$$

où ϕ est une constante. Le mouvement de l'origine de S ($x^1=0$) est $x'^0=x^0 \mathrm{ch}\,\phi$; $x'^1=- x^0 \mathrm{sh}\,\phi$ si bien que l'on identifie

$$v/c = -\,x'^1/x'^0 = \tanh\phi$$

Soit, en terme de la vitesse

$$x'^0 = \frac{x^0 - vx^1/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad x'^1 = \frac{x^1 - vx^0/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Ces expressions permettent de retrouver la dilatation du temps et La contraction des longueurs

L'expression explicite des transformations de Lorentz mélange coordonnées spatiales et temporelle. En terme de la rapidité, ces transformations sont des rotations de l'espace-temps de Minkowski. Elles prennent la forme plus connues en utilisant la vitesse. Cette dernière forme permet de retrouver les transformations de Lorentz dans la limite non relativiste.

Ces expressions permettent de retrouver:

- *la dilatation du temps*. Pour cela considérer deux événements ayant lieu au même endroit (dx=0) et a dt d'intervalle dans S. on voit clairement que ces deux événements sont observés à $dt'=dt/\mathrm{sqrt}(1-v^2/c^2)$ dans S'.

- *la contraction des longueurs*. Considérer un objet rigide tel que les lignes d'univers de ses extrémités soient des lignes d'univers parallèles . On appelle longueur propre la distance entre ces extrémités à t constant. Si dx est la longueur dans le référentiel S où il est au repos, sa longueur dans S' sera $dx'=dx\ \mathrm{sqrt}(1-v^2/c^2)$.

On trouve dans les ouvrages de relativité restreinte de nombreuses constructions géométriques pour dériver ces propriétés et les notions de causalité. Pour ma part, je les trouve toujours très confus car ils basent sur des raisonnement euclidien pour faire de la géométrie pseudo-euclidienne. Mon avis est qu'il est plus simple d'oublier tous les dessins et de toujours comparer ce qui est mesuré dans chaque référentiel et surtout de ne jamais essayer de donner une quelconque signification physique au temps coordonnée. On remarquera alors qu'il n'y a jamais de contradiction entre ce que mesurent 2 observateurs.

2- TEMPS PROPRE

Temps propre: temps mesuré par un observateur dans son référentiel Propre, c à ddans le référentiel inertiel où il est au repos.

On le note t

On a donc $$ds^2 = -\,c^2 d\tau^2$$

Le temps propre est donc relié à la longueur de la ligne d'univers.

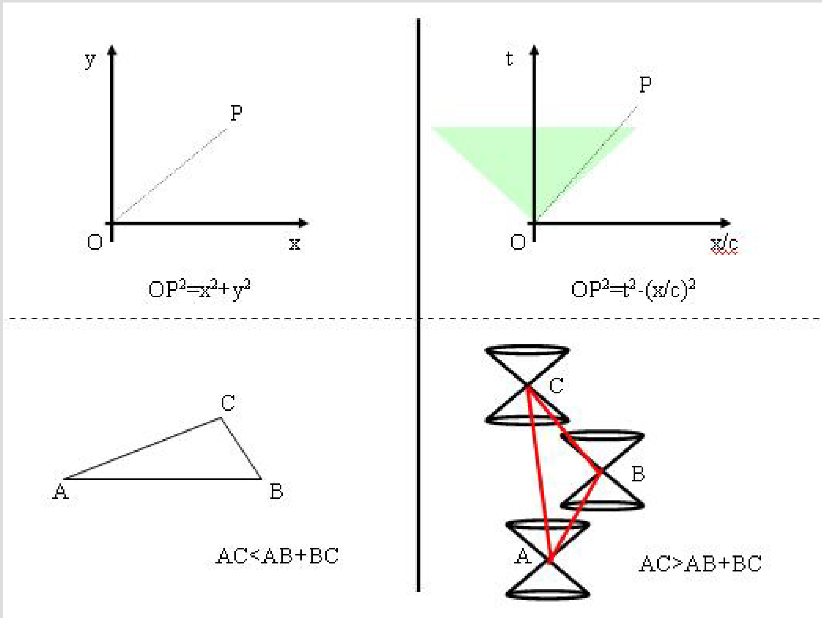
Le temps mesuré par un observateur entre deux points dépend de son trajet.

$$T_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt$$

Le temps propre est le temps qui s'écoule sur la montre d'un observateur. C'est donc celui mesuré par cet observateur. La comparaison des temps propres de deux observateurs demande d'étudier comment ils s'échangent l'information.

Le temps mesuré par deux observateur entre deux points de l'espace-temps A et B dépend de leur trajet (et donc de leur vitesse par rapport au repère absolu). C'est en contradiction avec la prédiction newtonienne. Cf. les vérifications de la dilatation du temps plus haut.

2- JUMEAU DE LANGEVIN



Ce qui est popularisé sous le terme de ``paradoxe des jumeaux de Langevin'' est en fait une propriété basique de la géométrie pseudo-euclidienne et de l'inégalité triangulaire.

En fait, cette propriété dérive directement de l'inégalité triangulaire pour les longueurs des lignes d'univers (et donc pour les temps propres).

Soulignons aussi qu'il n'y a aucun paradoxe.

2- OBSERVATEUR ACCÉLÉRÉ

Accélération constante $\gamma^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = (0, g)$

Trajectoire $((x - x_0)g + 1)^2 - g^2(t - t_0)^2 = 1$

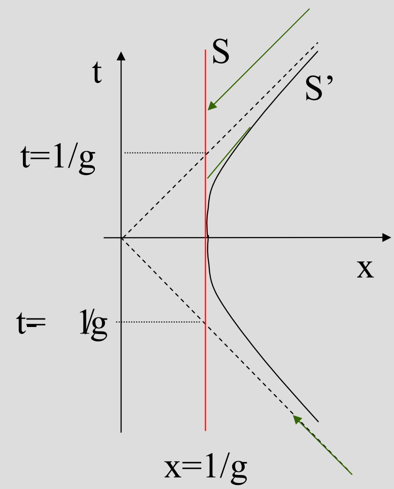
Notion d'**horizon**

S envoie des signaux vers S' avec une fréquence T.

La fréquence de réception est

$$T' = T\sqrt{\frac{1+v_{rec}}{1-v_{rec}}}$$

$t \rightarrow 1/g \qquad v_{rec} \rightarrow 1 \qquad T' \rightarrow \infty$



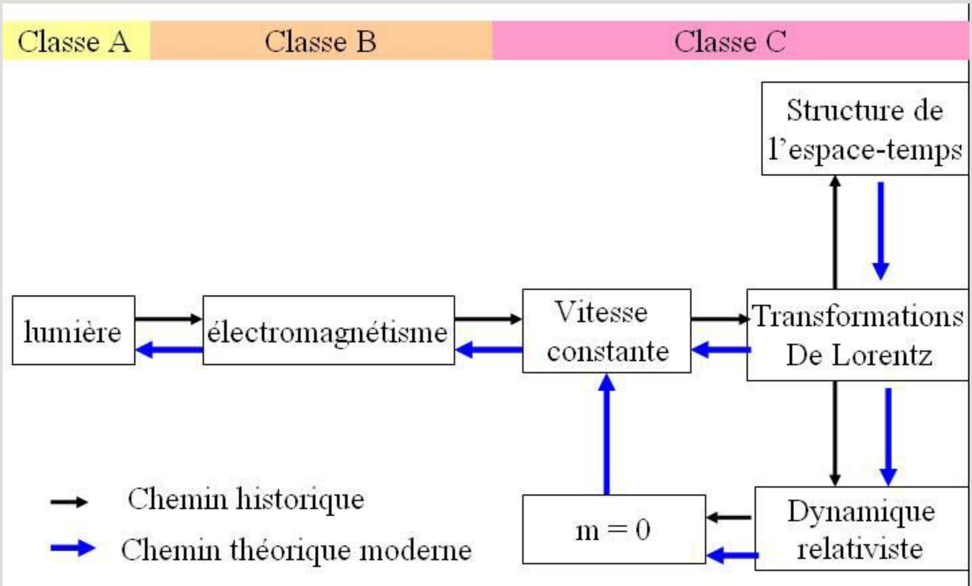
A titre d'exemple considérons le cas d'un observateur uniformément accéléré.

En partant de u.u=-1 et gamma.gamma = g^2 on obtient la forme de la trajectoire. C'est une hyperbole qui est tangente à la parabole galiléenne quand gt tend vers 0 et la vitesse de la particule approche celle de la lumière à grand temps.

Si S' envoie des signaux vers S, on voit que S n'en reçoit aucun avant t=-1/g. On dit que S' rentre dans l'horizon de S à t=-1/g. Réciproquement si S envoie des signaux vers S', aucun des signaus envoyés après t=1/g n'atteindra S'. S sort de l'horizon de S' à t=1/g (S' ne saura plus rien de S après cette date).

Ce concept d'horizon est important car il quantifie la possibilité qu'ont deux observateurs de communiquer. De plus on voit que les signaux sont décalé vers le rouge. S peut sortir de l'horizon de S' mais S' recevra toujours de l'information de S même si cette information a été émise avant t=1/g. La période de l'onde reçue est de plus en plus grande et son énergie diminue. S' voit S s'évanouir doucement et non siparaître directement.

2- NOTE SUR LA VITESSE DE LA LUMIÈRE



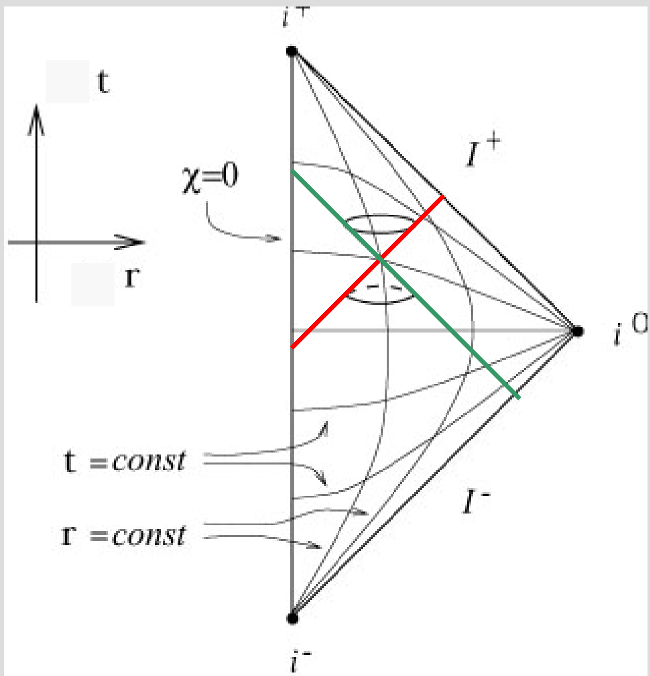
Il faut distinguer les 4 facettes de la vitesse de la lumière:

- vitesse des ondes électromagnétiques
- vitesse maximale
- vitesse des ondes gravitationnelles
- constante de couplage dans les équations d'Einstein

Ce n'est que dans un cadre théorique précis que ces 4 vitesses coïncident. Cf. Ellis et Uzan, Am. J . Phys . **73** (2005) 240, [*gr-qc/0305099*].

TIPE: le lien entre constante de la nature et temps est sujet intéressant.

2- Représentation conforme



Pour finir, je fais allusion à la représentation conforme d'un espace-temps.

Il est pratique de représenter l'espace de Minkowski de façon compact afin d'en faire ressortir sa structure globale et ses propriétés de causalité. Ces construction introduites par Penrose sont très utiles en relativité générale car elles permettent d'appréhender la structure globale de l'espace-temps en s'affranchissant d'un système de coordonnées particulier.

L'idée est la suivante:

1- on introduit des coordonnées représentant la trajectoire des photons:

u = t-r et v=t+r

2- on supprime deux dimensions. Pour cela on se met en coordonnées sphérique et on supprime par la pensée les dépendances angulaires. Chaque point du diagramme est donc une sphère.

3- u et v varient de 0 a l'infini. U tendant vers l'infini correspond à aller à l'infini en suivant une géodésique nulle. On ramène cet infini à une valeur finie en posant

u = tg U et v = tg V

4- on a donc V-U>0 et U et V variant de 0 à Pi/2.

5- Dans ces coordonnées les trajectoires des photons sont des lignes diagonales à 45deg.

6- I^+ est l'infni nul futur: c'est la surface que l'on atteint en un temps infini en suivant un photon.

I^- est l'infni nul passé: c'est la surface d'où l'on vient en un temps infini en suivant un photon.

i^+ et i- sont les infinis temporels: c'est le lieu atteint par toute particule massive quand t temps vers l'infini

i^0 est l'infini spatial: toutes les sections spatiales y convergent.

Les espace-temps de la relativité générale

Je vais être encore moins précis en relativité générale car cela demanderait beaucoup de technicité. Personnellement, je pense que cet aspect en dangereux pour des sujets de TIPE!

3- REPRÉSENTATION DE L'ESPACE

La relativité générale repose sur le **principe d'équivalence d'Einstein**:

- universalité de la chute libre
- invariance de Lorentz locale
- invariance de Position locale

<u>Conjecture</u>:

Principe d'équivalence d'Einstein < > géométrisation de la gravité

<u>Conséquence</u>:

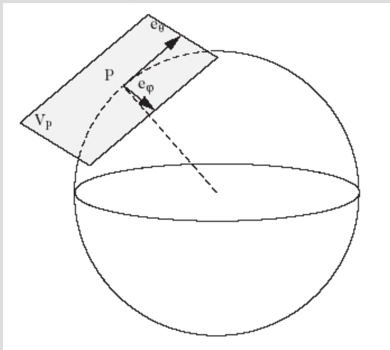
Toutes les constantes de la nature sont constantes

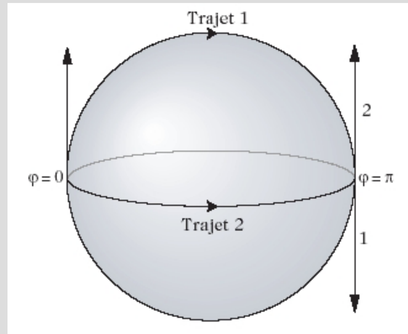
La relativité restreinte est née du principe de relativité imposé à tous les référentiels inertiels. La relativité générale ne fait plus cette restriction.

3- REPRÉSENTATION DE L'ESPACE

Géométrisation de la gravitation $ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu$

Nécessité de définir un transport parallèle





Notion de courbure

La relativité générale est fondée sur une géométrisation de la gravitation. Ceci implique que l'espace-temps est représenté par une variété quadridimensionnelle.

La géométrie est caractérisée par une métrique,c-à-d. un tensur symétrique d'ordre 2.

Localement on peut toujours effacer la gravité en se plaçant dans un repère en chute libre. Localement donc tout espace peut-être décrit par un espace-temps de Minkowski. La gravitation n'a cependant pas disparu car ceci n'est possible que localement. En effet, il existe des forces de marées que l'on ne peut pas annuler. Ces forces sont associées au tenseur de Riemann de l'espace-temps. Ainsi localement il existe un système de coordonnées tel que g_{\mu\nu} se ramène à \eta_{\mu\nu}$ mais ce n'est pas possible globalement (sauf si l'espace est plat).

Localement la structure causale est celle de l'espace de Minkowski, mais il s'agit de la structure de l'espace tangent. Il est donc nécessaire d'introduire une notion de transport parallèle afin de comparer les espaces tangents en deux points. Dans un espace-temps courbe, le transport d'un vecteur va dépendre du chemin suivi, ce qui est caractéristique de la courbure.

3- DYNAMIQUE

Ces structures étant introduites, les équations d'Einstein déterminent la géométrie de l'espace temps

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

Les particules libres suivent des géodésiques

$$u^{\mu}\nabla_{\mu}u^{\nu} = 0$$

Limite newtonienne $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\delta^{ij}\partial_j h_{00} \longrightarrow h_{00} = 2\phi/c^2$$

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho$$

$$\boxed{\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}}$$

La structure de l'espace-temps est décrite par une métrique, c'est-à-dire un tenseur symétrique de rang 2. Cette métrique est solution des équations Einstein qui sont un système de 10 équations différentielles non linéaire reliant le tenseur de Ricci, construit à partir de la métrique, au tenseur énergie-impulsion décrivant la distribution de la matière.

Le mouvement d'une particule libre est une géodésique de l'espace-temps, c-à-d. une courbe de longueur minimum.

La constante kappa n'est pas déterminée a priori mais en prenant la limite newtonienne de ce système d'équation.

Pour cela, il faut identifier la limite du mouvement géodésique à la troisième loi de Newton, ce qui permet d'identifier h00 au potentiel gravitationnel. On comprend alors mieux la géométrisation: dans la limite newtonienne le potentiel gravitationnel fait partie de la métrique et toutes les particules sont libres.

Dans un deuxième temps, les équations d'Einstein se réduisent à l'équation de Poisson. Ainsi, kappa est lié directement à la constante de newton.

3- Effet Einstein

Les photons suivent aussi des géodésiques:

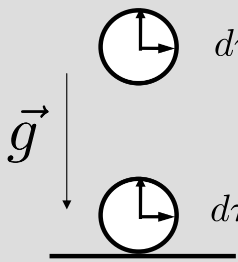
- déflection par toute masse
- décalage spectral

temps coordonnée

temps propre

$$ds^2 = -\,(1+2\phi/c^2)c^2dt^2 + d\ell^2 = -\,c^2d\tau^2$$

Potentiel gravitationnel



$$d\tau_1 = (1+\phi_1/c^2)dt$$

$$d\tau_2 = (1+\phi_2/c^2)dt$$

$$\left.\right\} \quad d\tau_1 = \left(1+\frac{\phi_1-\phi_2}{c^2}\right)d\tau_2$$

L'effet Einstein est une des trois prédictions originelles de la relativité générale (avec la déflection de la lumière et l'avance du périhélie de Mercure). Il ne fut vérifié qu'en 1960 par Pound et Rebka.

Dans la théorie d'Einstein, toutes les particules sont sur un pied d'égalité et subissent les effets de la gravitation de la même façon. C'est le cas des photons dont la trajectoire est aussi donnée par une géodésique (de longueur nulle comme en relativité restreinte).

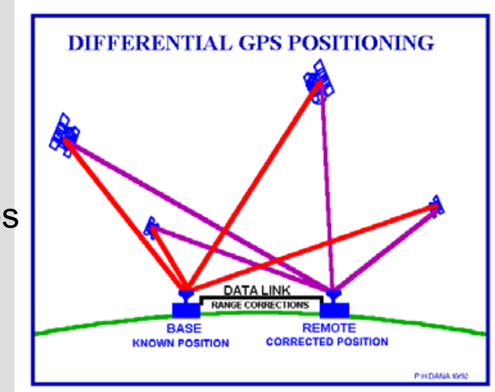
Comparons deux horloges atomiques localisées en deux points de l'espace et que nous appelons phi le potentiel gravitationnel (nous sommes ici dans une limite newtonienne mais le résultat est complètement général). Le temps propre de chaque horloge est relié au temps coordonnée et au champ de gravitation local. La comparaison des temps propre de deux horloges identiques nous montre qu'elles ne fonctionnent pas de façon identique. Une montre dans un champ gravitationnel retarde par rapport à une montre dans un champ de gravitation faible.

Remarquons que le temps coordonnée t n'a aucun sens physique. Il n'est pas mesurable et la seule chose qui fait sens c'est la comparaison de temps propre mesurée par deux observateurs.

Remarquons aussi qu'à cet effet s'ajoute celui de la relativité restreinte et induit par le mouvement des horloges.

Dernier point à souligner: nous avons ici comparer les temps propre des deux horloges sans prendre en compte le changement que peut induire la propagation du photon dans l'espace-temps courbe. C'est légitime dans un espace-temps statique. Dans l'expérience de Pound et Rebka, une des horloges était au sol alors que la seconde était au sommet de d'une tour de 22 mètres de haut.

Application: GPS



Localisation par une méthode de triangulation.

On doit synchroniser des horloges en orbites

Deux sources de dérives:

- *mouvement relatif*
(effet de relativité restreinte)
7,1 microsec./jour – 2 km/j.

- *champ de gravitation*
(effet Einstein)
45,7 microsec./jour – 14 km/j

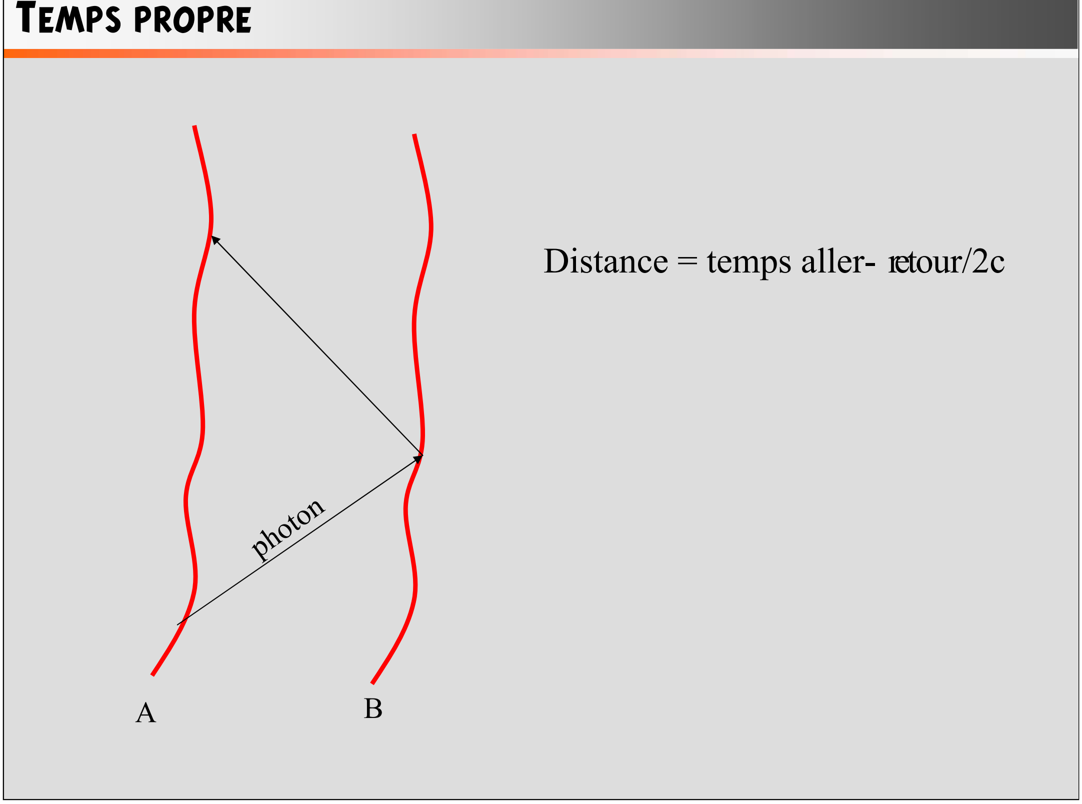
Une des applications de cet effet relativiste est le GPS (Global Positioning System) qui permet de se localiser à la surface de la Terre par une méthode de triangulation. Les distances sont déterminées par la mesure des temps de parcours de signaux électromagnétiques en provenance d'au moins trois satellites. La position de l'usager correspond à l'intersection des sphères centrées sur chaque satellite. La détermination du rayon de ces sphères nécessite une synchronisation des horloges.

Pour obtenir une précision de 10 mètres, il faut une précision de 30 nanosecondes (les horloges atomiques s'affranchissent facilement de cette contrainte, cf. C. Salomon). Ces horloges bien que stables doivent être régulièrement synchronisées. Deux effets sont à prendre en compte:

- *dilatation du temps* (induisant un retard). Les horloges ne sont pas en orbite géostationnaires et ont une vitesse de l'ordre de 3874 m/s. Elles retardent donc de 7,1 microsecondes/jour par rapport à une horloge terrestre, ce qui correspond à une erreur de 2km/jour.

- *l'effet Einstein* (induisant une avance). Les horloges sont à une altitude de 20000 km et donc dans un champ gravitationnel plus faible. Cette dérive est de 45,7 microsecondes/jour, ce qui correspond à 14 km/jour.

Le GPS est bon sujet de TIPE (voir par exemple Pour la Science, décembre 2004, p. 44).



En physique newtonienne, nous avons discuté de la construction d'un référentiel, incarné par un référentiel rigide. En relativité générale, la distance entre deux corps est beaucoup plus difficile à mesurer. La distance est une notion non locale et on ne peut jamais s'assurer qu'une règle est rigide (en effet sa longueur change si l'espace-temps se modifie, ce qui est par exemple le cas lors du passage d'une onde gravitationnelle).

Un observateur est par construction prisonnier sur sa ligne d'univers et il mesure grâce à une horloge son temps propre. Ainsi la distance entre deux observateurs peut être construite à partir du temps aller-retour d'un photon.

3- Quantités conservées

Symétrie de l’espace-temps et quantités conservées.

Nombre maximale de symétrie pour un espace de dimension *n*

$$n \qquad \frac{n(n-1)}{2} \quad \longrightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2}$$

On peut classifier les espaces par leurs symétries.

Seuls les espace-temps statiques ont une notion bien définies d’énergie.

Certaines symétries ne peuvent être satisfaites qu’asymptotiquement

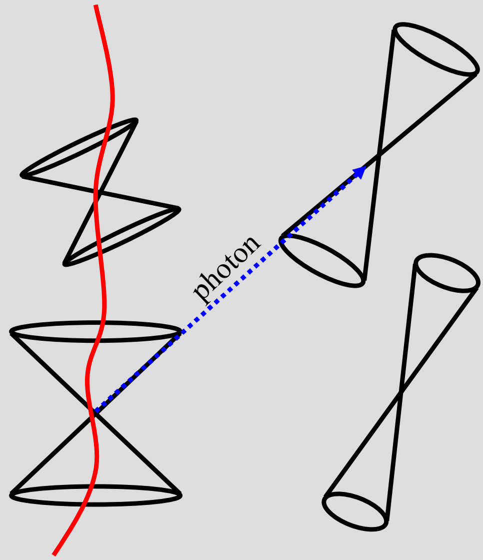
Une seconde implication de cette nouvelle structure concerne l’existence de quantités conservée. Dans le cadre newtonien, la conservation de l’énergie de l’énergie était associée à la reproductibilité des lois de la physique et donc au fait que le Lagrangien ne dépendait pas explicitement du temps.

En relativité générale, on peut montrer que pour un espace-temps donné, chaque symétrie de cet espace-temps induit une quantité conservée. Par exemple, on ne peut définir l’énergie que pour un espace-temps statique. Dans un cas générale, cette notion ne peut pas être introduite. C’est par exemple le cas en cosmologie.

3- Espace-temps de la relativité générale

La relativité généralise cette structure: l'espace est une **mosaïque** d'espace-temps de Minkowski

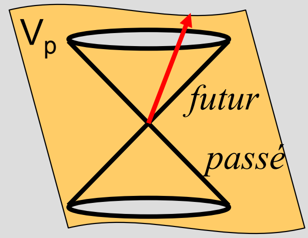
Structure de l'espace-temps devient dynamique



Comment déterminer si la structure causale de l'espace-temps n'est pas pathologique?

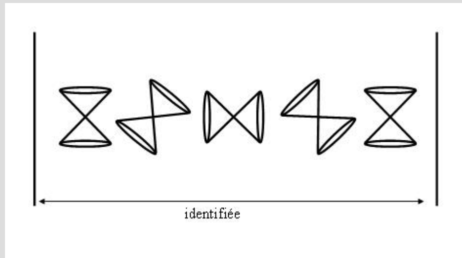
3- ÉLÉMENTS SUR LA STRUCTURE GLOBALE

Espace tangent isomorphe to M_4:



Est-il toujours possible de faire un choix continu de *futur* et *passé*?

NON



Si OUI, l'espace est dit *temporellement orientable*

En chaque point p de l'espace-temps, l'espace tangent est isomorphe à l'espace de Minkowski. Tout comme en relativité restreinte, on peut choisir (arbitrairement) la moitié du cône de lumière comme étant le futur et l'autre le passé.

Ceci nous amène à introduire la notion d'espace-temps temporellement orientable. Nous donnons ici un exemple d'un espace qui ne possède pas cette propriété.

Ces espaces ont la pathologie que l'on ne peut pas distinguer de façon cohérente un phénomène allant dans le temps et un phénomène remontant le temps.

Si l'espace est temporellement orientable alors un vecteur dans le cône de lumière futur est dit *vecteur futur de genre temps*.

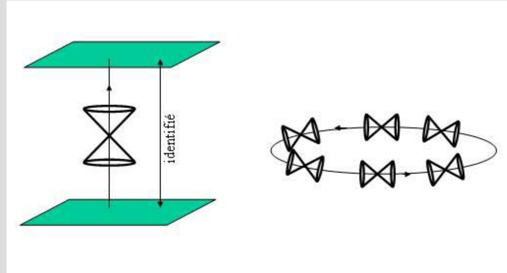
NOTE: ne pas confondre orientabilité temporelle et orientabilité de la variété.

3- Eléments sur la structure globale

Causalité

Courbe temporelle fermée:

Espace de Gödel,…



On peut définir différentes notions de causalité

C’est en particulier le cas si on peut folier l’espace temps par des hypersurfaces {q=constant}

De même on peut imposer des conditions pour qu’un espace-temps est une structure causale raisonnable. Dans Newton, la causalité nous avait fait exclure le cercle. Ici, la situation est plus complexe car on ne peut pas considérer le temps indépendamment de l’espace.

Le temps et la cosmologie

4- COSMOLOGIE

Cosmologie

quelle est l'espace-temps qui décrit notre univers?

Univers versus univers observable

Limitations

1 univers – 1 point d'observation

Hypothèses non vérifiables

Modèle du big bang chaud

RG – matière ordinaire – principe cosmologique
conséquence: univers est en expansion

Historicité

La cosmologie essaie de décrire l'univers aux grandes échelles et de répondre à la question: quelle est l'espace-temps qui décrit notre univers.

Succès:

1- Loi de Hubble (prédiction de Lemaître, 1924)
2- nucléosynthèse primordiale (prédiction de Gamow 1948)
3- existence d’un fond diffus de radiation (prédiction de Gamow 1948)
   * détection de Penzias et Wilson
   * spectre de Planck (cf. Mather-Smoot)
   * existence de fluctuation
4- explique l’origine des grandes structures

4- COSMOLOGIE

On ne mesure jamais de temps ou de distance

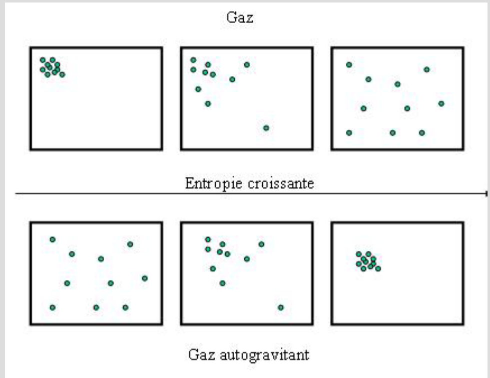
- *positions angulaires*
- *décalage spectral*

Age d'un objet, de l'univers est inféré à partir d'un modèle

4- COSMOLOGIE

Contribution à l'origine de la flèche du temps

Entropie et gravitation



Pourquoi l'univers était-il si homogène initialement?

5- CONCLUSIONS

1- Il est important de distinguer les espaces mathématiques représentant l'espace et le temps de l'espace et du temps eux-mêmes.

2- La comparaison entre ces espaces et le monde sensible est difficile (construction de référentiels, d'horloges etc…)

3- Avec la relativité restreinte on doit penser espace-temps et on ne peut plus dissocier les deux concepts.

4- Avec la relativité générale, la gravitation est géométrisée et l'espace-temps a une structure géométrique qu'il faut déterminer en utilisant les équations d'Einstein.

5- Dans le cadre cosmologique, notre espace-temps a une histoire. Les conditions initiales particulières peuvent être à l'origine de la flèche du temps

6- Dans tous ces cadres, on sait discuter de façon précise de la notion de causalité.

Bibliographie

1- N. Deruelle et J.-P. Uzan, *Mécanique et gravitation newtoniennes*, Vuibert, 2006.

2- J. Einsenstaedt, *Avant Einstein*, Seuil, 2005.

3- J.P. Uzan and R. Lehoucq, *Les constantes fondamentales*, Belin, 2005

4- R. Wald, *gravitation*, Chicago University Press, 19XX, chap.

5- S. Hawking and G.F.R Ellis, *The large scale structure of the universe*, Cambridge university press, 1973.

6- J.R. Lucas and P.E. Hodgson, *Spacetime and electromagnetism*, Oxford university press, 1990.

7- P. Peter and J.-P. Uzan, *Cosmologie Primordiale*, Belin, 2005.

8- E. Klein et M. Spiro Edts., *Le temps et sa flèche*, Ed. Frontières, 1994.

9- Landau et Lifschitz, *Cours de physique Théorique, Tome I: mécanique*, MIR

Je donne ici une petite bibliographie permettant d'approfondir certains points de cet exposé:

1- un exposé de la physique newtonienne utilisant les outils de la géométrie différentielle.

2- un exposé historique sur la notion de relativité newtonienne.

3- un recueil de textes historiques sur la notion de constantes. Pour cet aspect on peut aussi lire

J.P. Uzan et B. Leclercq, *De l'importance d'être une constante*, Dunod, 2005.

4- exposé de relativité générale technique. Le chapitre 8 traite des propriétés de causalité des espace-temps.

5- idem. Discussion sur les notions de diagrammes conformes.

6- une étude complète du groupe de Lorentz en relativité restreinte et des diverses façons de le dériver.

7- monographie de cosmologie (niveau M2).

8- recueil de textes sur la notion de temps dans divers domaines de la physique. Pour une version technique, voir

H.D. Zeh, *The physical basis of the direction of time*, Springer, 2001.

9- exposé de toute première qualité sur la formulation de la mécanique non relativiste.