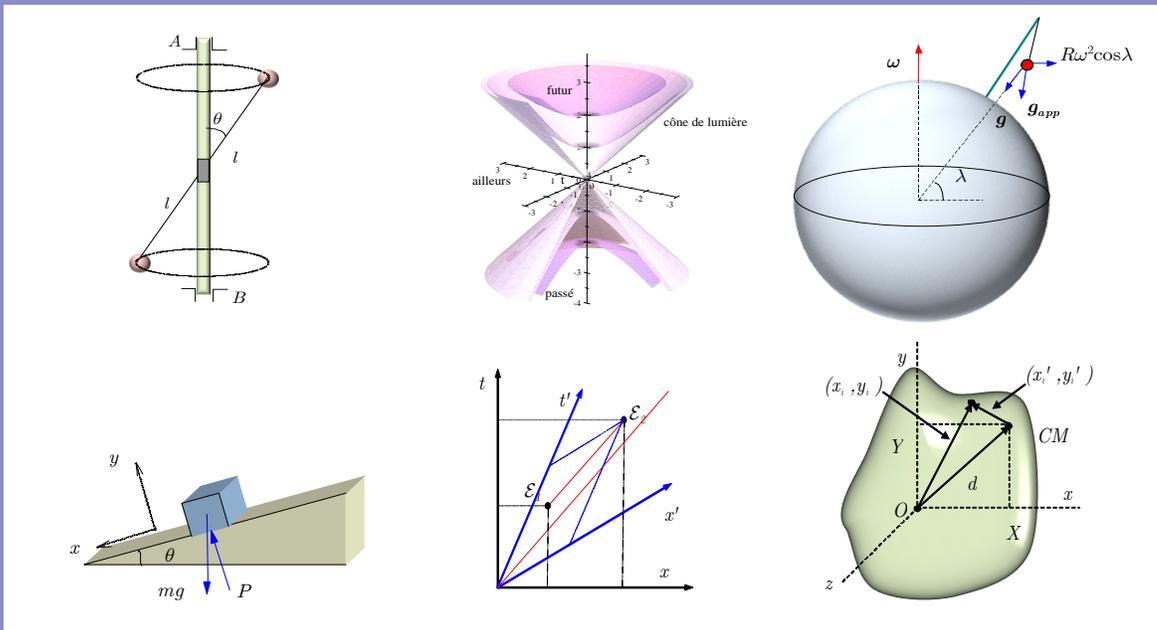


Mécanique et relativité restreinte

L. Marleau



Mécanique et relativité restreinte

L. Marleau

Département de physique, de génie physique et d'optique



Université Laval



Québec



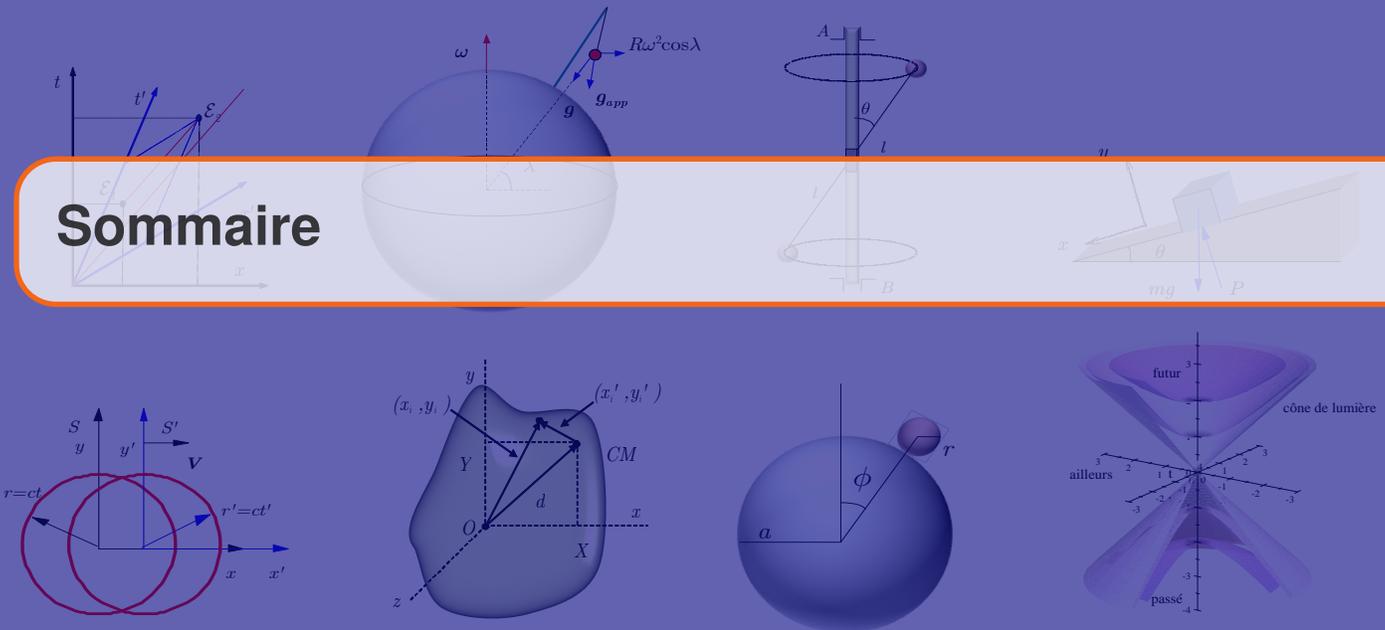
Canada

Cet ouvrage a été rédigé avec *Scientific WorkPlace* (SWP) et composé avec MiKTeX
© 1998-2018 L. Marleau

Département de physique, de génie physique et d'optique
Université Laval, Québec, Canada

*Tous droits réservés. Aucun extrait de cet ouvrage ne peut être reproduit, sous quelque forme
ou par quelque procédé que ce soit (machine électronique, mécanique, à photocopier, à enregistrer
ou tout autre) sans l'autorisation écrite préalable de l'auteur.*

Sommaire



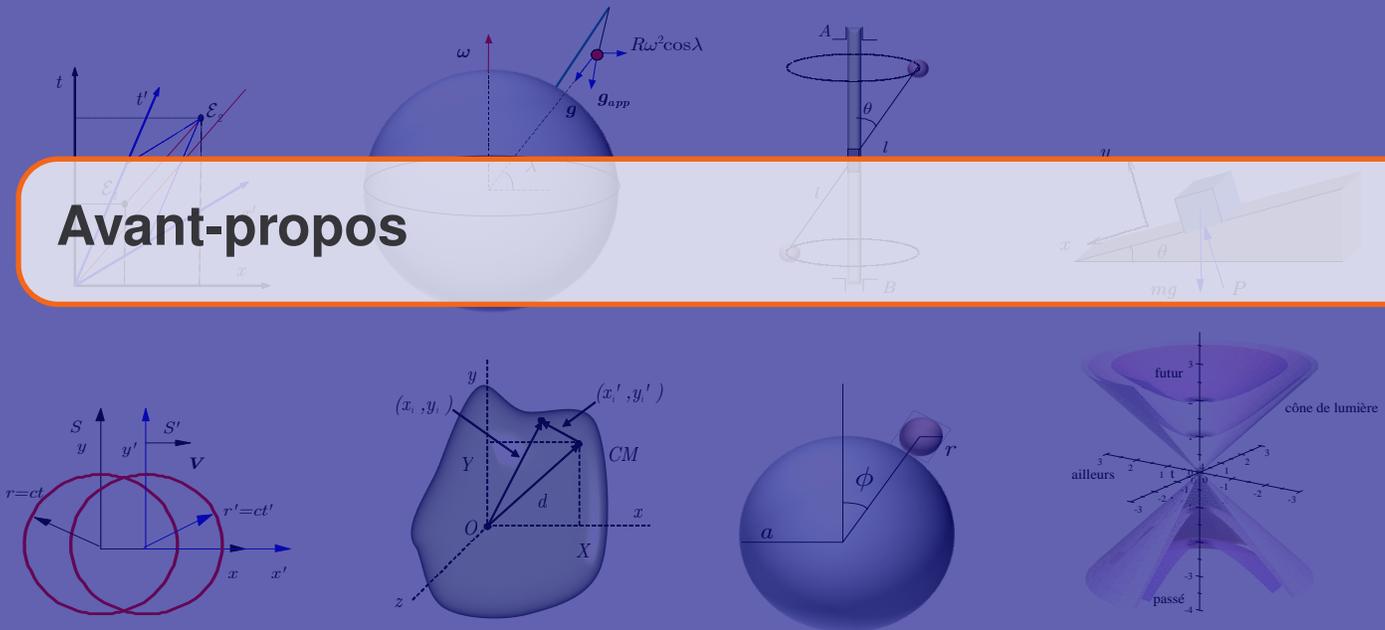
1	Vitesse de la lumière	1
1.1	Mesures de la vitesse de la lumière	1
1.2	Effet Doppler (non relativiste, ondes sonores)	3
1.2.1	Source en mouvement, récepteur fixe dans le milieu propagateur	3
1.2.2	Source au repos dans le milieu et récepteur en mouvement	4
1.3	Application : récession des galaxies - « red shift »	4
1.4	Repères inertiels en mouvement relatifs	5
1.5	Expérience de Michelson-Morley	6
1.6	Invariance de la vitesse de la lumière	8
1.7	La vitesse ultime	8
1.8	Exercices	10
1.8.1	Vitesse de la lumière	10
2	Principes de la relativité restreinte	13
2.1	Les principes fondamentaux	13
2.1.1	Le principe de relativité	13
2.1.2	Universalité de la vitesse de la lumière	14
2.2	Relativité et géométrie : les diagrammes espace-temps	17
2.2.1	Système de coordonnées d'un autre observateur	18
2.3	L'intervalle et son invariance	19
2.4	Classification des événements et temps propre	22
2.4.1	Relation de causalité	23
2.5	Limites de la relativité restreinte	24
2.6	Une nouvelle cinématique	24
2.6.1	Graduation des axes	24
2.7	Exercices	27
2.7.1	Principes de la relativité restreinte	27

3	Transformations de Lorentz	31
3.1	Transformations de Lorentz	31
3.2	Addition de vitesses	36
3.3	Exemples d'addition de vitesses	37
3.4	Contraction de l'espace et longueur propre	38
3.4.1	Le paradoxe de la perche et la grange	40
3.5	Dilatation du temps et temps propre	41
3.5.1	Une vérification expérimentale	43
3.5.2	Le paradoxe des jumeaux	44
3.6	Effet Doppler : cas relativiste	45
3.6.1	Cas du mouvement longitudinal	45
3.6.2	Cas du mouvement transversal	46
3.6.3	Cas général	46
3.7	Horloges accélérées	47
3.8	Formalisme quadridimensionnel	48
3.9	Exercices	55
3.9.1	Transformations de Lorentz	55
4	Dynamique relativiste	61
4.1	Conservation de la quantité de mouvement	61
4.2	Énergie cinétique	63
4.3	Le quadrivecteur d'énergie-impulsion	63
4.4	Travail et énergie cinétique	66
4.5	Transformations de Lorentz de l'énergie-impulsion	67
4.6	Exemple : collision inélastique	70
4.7	Exemples quantitatifs	71
4.8	Particules de masse nulle	72
4.9	Effet Doppler-nouvelle approche	73
4.10	Pression de radiation	73
4.11	Transformation d'une force	74
4.12	Invariance de la charge électrique	75
4.13	Champ magnétique	75
4.14	Le test : les accélérateurs de particules	76
4.15	Exemples	77
4.15.1	Accélération dans un champ électrique constant	77
4.15.2	Déflexion par un champ électrique	78
4.15.3	Particule dans un champ magnétique	80
4.15.4	Seuil de réactions	81
4.15.5	Vitesse du RIN d'un système relativiste	84
4.15.6	Énergie disponible	84
4.15.7	Effet Compton	85
4.16	Exercices	87
4.16.1	Dynamique relativiste	87
5	Repères accélérés	91
5.1	Rappel—Quelques problèmes en dynamique de Newton	91
5.1.1	La deuxième loi de Newton	91
5.1.2	Le frottement sec	92
5.1.3	Le mouvement circulaire	93

5.2	Les repères accélérés	93
5.3	Repères accélérés linéairement	94
5.4	Repères en rotation : introduction	95
5.4.1	Objet au repos par rapport au disque	95
5.4.2	Objet en mouvement par rapport au disque	97
5.4.3	Analyse des accélérations : Mouvement dans une direction radiale	99
5.4.4	Analyse des accélérations : Mouvement dans une direction tangentielle	100
5.5	Repères en rotation (cas général)	102
5.5.1	Repères accélérés linéairement (cas général)	103
5.5.2	Repères en rotation (cas général)	103
5.6	Mouvements observés de la surface de la Terre	106
5.6.1	Gravité apparente	106
5.6.2	Mouvement d'un projectile près de la surface de la Terre	107
5.7	Exercices	114
5.7.1	Rappel de cinématique non relativiste	114
5.7.2	Repères accélérés	118
6	Dynamique des solides indéformables	123
6.1	Dynamique d'un ensemble de particules	123
6.1.1	Centre de masse. Conservation de l'impulsion	124
6.1.2	Notion de moment cinétique. Conservation du moment cinétique	124
6.1.3	L'énergie cinétique d'un système de particules	125
6.1.4	Milieux continus	126
6.2	Le solide indéformable : Introduction	126
6.2.1	Rotation d'un solide indéformable autour d'un axe fixe	127
6.2.2	Moments d'inertie de divers corps	128
6.2.3	Théorème des axes parallèles	130
6.2.4	Théorème des plaques minces (ou des axes perpendiculaires)	132
6.2.5	Équation de mouvement et cinématique de rotation	133
6.2.6	Conservation du moment cinétique	133
6.2.7	Condition d'équilibre statique	133
6.2.8	Centre instantané de rotation, roulante et base du mouvement	134
6.3	Mouvements combinés de translation et de rotation	135
6.3.1	Frottement, glissement et roulement	135
6.4	Dynamique de la rotation	136
6.5	Solide indéformable et conservation de l'énergie	137
6.6	Percussion et rotation	138
6.7	Relation entre moment cinétique et vitesse angulaire	140
6.8	Introduction au gyroscope	142
6.8.1	Gyroscope soumis à un moment de force constant	143
6.8.2	Précession des équinoxes	144
6.9	Exercices	145
6.9.1	Dynamique des solides indéformables	145
A	Notations, unités et constantes de physique,...	151
A.1	Notations	151
A.2	Unités SI	152
A.3	Facteurs de conversion	153
A.4	Unités naturelles	154
A.5	Unités de Lorentz-Heaviside	155

A.6	Constantes fondamentales de physique	155
A.6.1	Constantes universelles	155
A.6.2	Constantes électromagnétiques	156
A.6.3	Constantes astronomiques	156
A.6.4	Constantes atomiques	156
A.6.5	Constantes physico-chimiques	157
A.7	Systèmes de coordonnées	157
A.7.1	Coordonnées cartésiennes	157
A.7.2	Coordonnées cylindriques	159
A.7.3	Coordonnées sphériques	160
A.7.4	Coordonnées curvilignes (cas général)	162
B	Aide-mémoire	165
B.1	Repères accélérés	165
B.2	Dynamique de solides indéformables	165
B.3	Relativité restreinte	167
C	Références	169

Avant-propos



Version 2018.12.08.11.20

Cet ouvrage contient l'essentiel du matériel couvert dans le cours de Mécanique et relativité restreinte (PHY-1003) du Département de physique, de génie physique et d'optique de l'Université Laval dans le cadre de son programme de physique du 1^{er} cycle (B.Sc.). Malgré qu'il existe de nombreux ouvrages sur la mécanique classique, aucun ne répond aux besoins spécifiques de ce cours.

On présume d'entrée de jeu que certaines notions de mécanique newtonienne sont déjà acquises telles que les lois de Newton et ses applications. On y aborde la relativité restreinte, les repères accélérés et les solides indéformables et en ce sens, elles viennent s'arrimer aux notions déjà acquises dans le cours de mécanique classique du CEGEP (niveau Physique 1 de H. Benson ou Physique - Mécanique, tome 1 de D. Halliday, R. Resnick, J. Walker).

Les notes sont divisées en deux parties : Les notions de mécanique avancée (repères accélérés et solides indéformables) sont traitées aux chapitres 5 et 6 alors que la relativité restreinte est introduite (chapitres 1, 2, 3 et 4). L'annexe contient un résumé des notations, un aide-mémoire et quelques références complémentaires.

Bonne lecture !

L. Marleau

*Département de physique, de génie physique et d'optique
Université Laval, Québec, Canada*



Mises à jour

Version 2018.12.08 :

- Corrections mineures.

Version 2016.01.06 :

- Refonte du style de mise en page.
- Utilisation du package hyperref pour activer les hyperliens dans la table des matières (globale ou partielle au début de chaque chapitre), dans l'index et dans le texte (équations, figures, problèmes,...).
- Corrections mineures.

- Présentation : Changement de l'ordre des chapitres (la relativité restreinte est déplacée à la fin des notes).
- Corrections mineures.

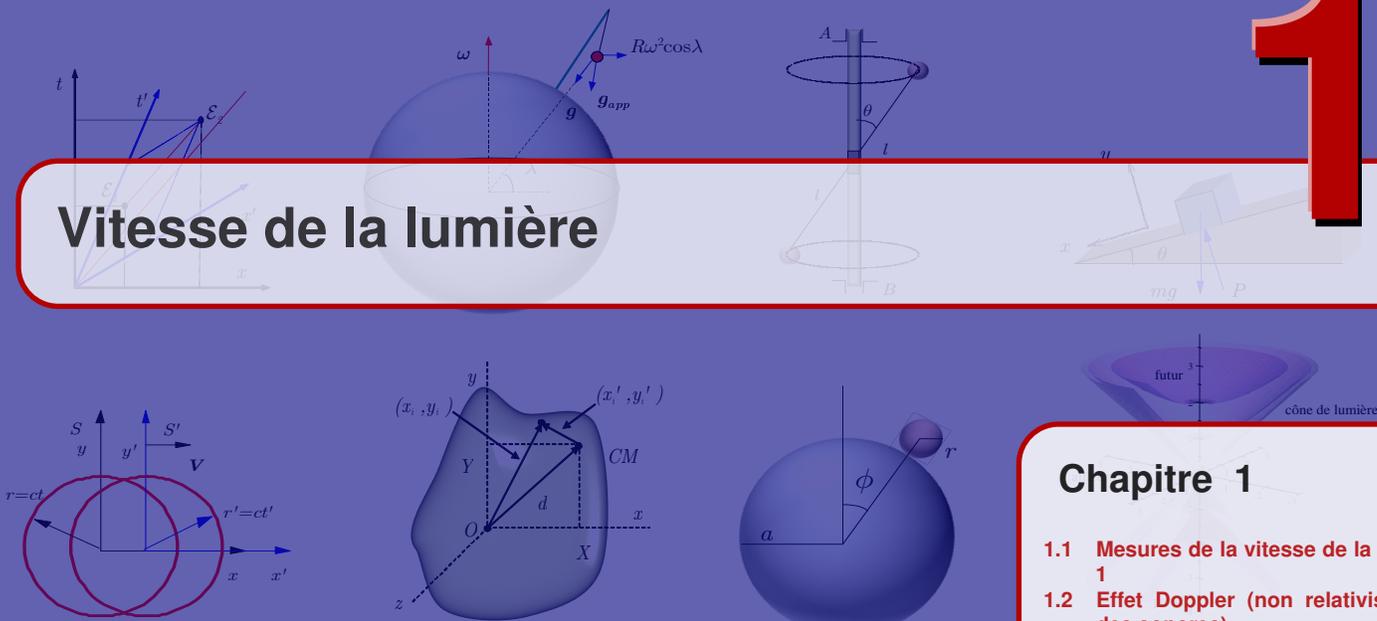
Version 2011.11.02 :

- Présentation : Rajout d'encadrés colorés pour mettre en évidence les exemples, exercices et remarques.
- Modification de la définition de l'intervalle relativiste pour être plus conforme avec la métrique (chapitres sur la relativité restreinte)
- Corrections mineures.

Version 2011.08.30 :

- Présentation : Certaines figures ont été refaites pour donner un effet 3D
- Corrections mineures.

Vitesse de la lumière



Chapitre 1

- 1.1 Mesures de la vitesse de la lumière 1
- 1.2 Effet Doppler (non relativiste, ondes sonores) 3
- 1.3 Application : récession des galaxies - « red shift » 4
- 1.4 Repères inertiels en mouvement relatifs 5
- 1.5 Expérience de Michelson-Morley 6
- 1.6 Invariance de la vitesse de la lumière 8
- 1.7 La vitesse ultime 8
- 1.8 Exercices 10

LA VITESSE DE LA LUMIÈRE a été un élément important dans l'élaboration de la relativité restreinte et dans la remise en question de la mécanique de Newton. Historiquement, elle a d'abord été implicitement présumée comme une quantité infinie, c'est-à-dire l'information était transmise instantanément. Plus tard, certaines méthodes de mesures ont été utilisées pour déterminer la vitesse de la lumière qui s'est avérée finie. Mais la nature ondulatoire de la lumière posait problème : Comment une onde pouvait-elle se propager sans support matériel (dans le vide) ? Ceci mena à l'hypothèse de l'éther et éventuellement à l'expérience de Michelson-Morley....

La vitesse de la lumière (dans le vide) est une constante fondamentale :

1. C'est la vitesse de propagation de la radiation électromagnétique de toute fréquence.
2. C'est la vitesse ultime de tout signal.
3. Elle est la même dans tous les systèmes de référence.

$$c = 2.9979... \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \tag{1.1}$$

4. Elle intervient directement dans les équations de Maxwell de l'électromagnétisme ($\mu_o \epsilon_o = c^{-2}$ SI).
5. Elle intervient dans la constante adimensionnelle de « structures fines » : $\alpha = \frac{e^2}{2\epsilon_o hc} \simeq \frac{1}{137.036} =$. Cette constante joue un rôle fondamental en physique atomique et sa valeur n'est prédite par aucune théorie !

1.1 Mesures de la vitesse de la lumière

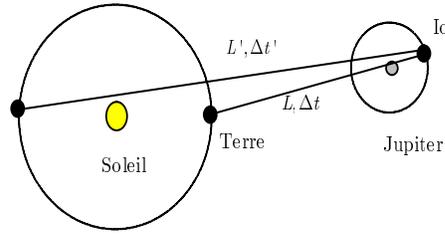
Les premières mesures de la vitesse de la lumière furent les suivantes :

1. Temps de transit à travers l'orbite terrestre (Roemer, 1676) :
 Cette mesure est basée sur la variation dans la période des éclipses du satellite Io de Jupiter pendant une année. Cette période varie suivant que la Terre s'éloigne ou se rapproche de Jupiter c'est-à-dire s'enfuit ou vient à la rencontre du signal lumineux .



Figure 1.1 ▲
Olaf Ole Roemer 1644-1710

Figure 1.2 ◀▶
Trajectoire de la lumière de Io, le satellite de Jupiter, à l'observateur situé sur la Terre.



Roemer nota que la variation de la période de Io par rapport à la période moyenne accumulée sur six mois se traduisait par un délai total de $\Delta T = 22 \text{ min}$ (les mesures actuelles donnent $\Delta T = 17 \text{ min}$). Suivant la figure 1.2, on remarque que lorsque la Terre est la plus près de Io, à une distance L , le temps de transit est seulement Δt alors qu'à son point le plus éloigné la lumière doit parcourir une distance L' ce qui requiert un temps de transit $\Delta t'$. Le délai total accumulé ΔT représente la différence entre le temps de transit de la lumière d'Io jusqu'à la Terre soit $\Delta T = \Delta t' - \Delta t$. Ici $\Delta t = \frac{L}{c}$ et $\Delta t' = \frac{L'}{c} = \frac{L+D}{c}$, alors

$$c = \frac{D}{(\Delta t' - \Delta t)} = \frac{D}{\Delta T} \tag{1.2}$$

où $D =$ diamètre d'orbite terrestre. Roemer estima alors $c_{\text{Roemer}} \simeq 214300 \text{ km/s}$.

2. Aberration des étoiles (Bradley, 1725) :

Une étoile au zénith semble, au cours d'une année, décrire une trajectoire circulaire (voir figure 1.4). Cette aberration est due à la vitesse tangentielle de l'observateur terrestre

Le diamètre angulaire de la trajectoire de l'étoile :

$$\tan \alpha = \frac{\text{distance parcourue par la Terre}}{\text{distance parcourue par la lumière}} = \frac{v_{\text{Terre}} \Delta t}{c \Delta t}$$

ou

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v_{\text{Terre}}}{c}\right) \tag{1.3}$$

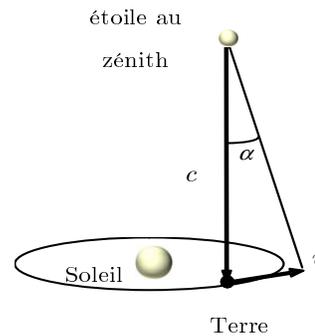
$$\sim 1.0 \times 10^{-4} \text{ rad.} \simeq 41''$$

Les observations de Bradley lui indiquaient une valeur de l'angle $\alpha_{\text{Bradley}} \simeq 40.5''$.

Figure 1.3 ▲
James. Bradley 1692-1762



Figure 1.4 ◀▶
L'aberration des étoiles est la conséquence de la vitesse tangentielle de l'observateur terrestre.



3. Roue dentée de Fizeau (1849) ou miroirs rotatifs de Foucault :

Avec un système ingénieux d'interrupteurs de lumière (roue dentée), Hippolyte-Louis Fizeau (en collaboration avec Jean Bernard Léon Foucault) fut le premier à réaliser un mesure de la vitesse de la lumière en laboratoire. Foucault raffina la méthode plus tard (1862) en remplaçant la roue dentée par des miroirs rotatifs. Plus tard, Michelson précisa ses mesures avec un appareillage basé sur le même principe :

En mesurant le temps de transit sur une distance de $2 \times 8633 \text{ m}$, Fizeau obtient :
 $c_{\text{Fizeau}} \simeq 315\,300 \pm 500 \text{ km/s}$.

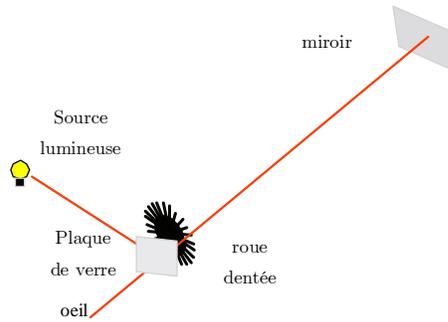


Figure 1.5 ◀ Schéma de l'appareillage de Fizeau.

Foucault avec miroirs rotatifs : $c_{\text{Foucault}} \approx 298000 \pm 500 \text{ km/s}$.

Michelson réalise une expérience similaire sur 35 km en 1926 et mesure : $c_{\text{Mich.}} = 299796 \pm 4 \text{ km/s}$.

4. Cavité résonante (~1950) :

La mesure de fréquence de résonance dans une cavité métallique est donné par $\nu = \frac{c}{2l}$, où l = longueur de la cavité. Cette mesure fut réalisée par Essen et donna : $c_{\text{Essen}} = 299792.5 \pm 1 \text{ km/s}$.

5. Radar.

6. Détecteur de lumière modulée... etc...

Des centaines de mesures, dans tous les domaines de fréquence, donnent

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}. \quad (1.4)$$

Maintenant, cette quantité sert de relation entre les étalons de longueur et de temps (c'est pourquoi on omet l'incertitude).

1.2 Effet Doppler (non relativiste, ondes sonores)

L'effet Doppler est le changement de la fréquence d'une onde observée par un détecteur en raison de sa vitesse par rapport à la source émettrice.

Étudions d'abord cet effet pour une onde sonore qui ne peut se propager que dans un milieu physique.

1.2.1 Source en mouvement, récepteur fixe dans le milieu propagateur

Prenons une source en mouvement avec un récepteur fixe dans le milieu propagateur (voir figure 1.7)

$$\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x \quad \text{: vitesse de la source vers le récepteur.} \quad (1.5)$$

La vitesse du son dépend seulement du milieu et est indépendante du mouvement de la source. Dans un milieu homogène, elle est constante et déterminée par la densité et l'élasticité du milieu.

Si en un point fixe du milieu, il passe ν_R pulsations par seconde, chacune séparée d'une distance λ_R , la vitesse de propagation est

$$\lambda_R \nu_R = v. \quad (1.6)$$

Si la source émet N pulsations durant Δt , la première pulsation parcourt une distance $v\Delta t$, mais pendant ce temps la source s'est déplacée de $V\Delta t$, alors ce train d'impulsions occupe une distance

$$(v - V)\Delta t$$

et la longueur d'onde est

$$\lambda_R = \frac{(v - V)}{N} \Delta t. \quad (1.7)$$

La fréquence est



Figure 1.6 ▲ Christian Doppler 1803-1853

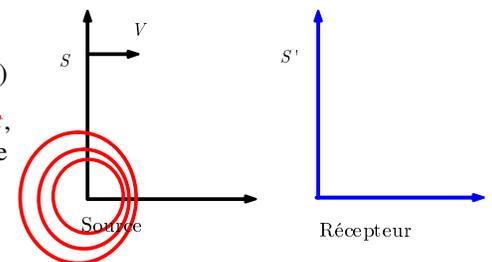


Figure 1.7 ▲ Une onde sphérique est émise par une source (S) en mouvement et captée par un récepteur (R) au repos par rapport au milieu de propagation.



$$v_R = \frac{v}{\lambda_R} = \frac{Nv}{(v-V)\Delta t} \tag{1.8}$$

$$= \frac{N}{\Delta t} \left(\frac{v}{v-V} \right) = v_S \left(1 - \frac{V}{v} \right)^{-1} \tag{1.9}$$

où $v_S = \frac{N}{\Delta t}$ est la fréquence d'émission de la source.

Pour une source en mouvement vers un détecteur fixe dans ce milieu : (vitesse V constante)

$$v_R = v_S \left(1 - \frac{V}{v} \right)^{-1} \simeq v_S \left(1 + \frac{V}{v} \right) \tag{1.10}$$

si $|V| \ll v$. Ici, on a utilisé le développement en série (série de Taylor) pour $|x| \ll 1$

$$(1 \pm x)^a = \left(1 \pm ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 \pm \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 \dots \right)$$

Si la source s'éloigne plutôt que de se rapprocher on doit remplacer V par $-V$. (Le sifflet du train est plus aigu quand il s'approche et plus grave il s'éloigne !)

1.2.2 Source au repos dans le milieu et récepteur en mouvement

Ici la source est au repos et le récepteur se déplace à la vitesse (voir figure 1.8)

$$\mathbf{V} = -V\mathbf{e}_x : \text{vitesse du récepteur vers la source.} \tag{1.11}$$

Un train de N pulsations occupe la distance $v\Delta t$ et sa vitesse par rapport au récepteur est $(v+V)$. Le récepteur voit ces N pulsations durant le temps $\frac{v\Delta t}{v+V}$ et mesure la fréquence

$$v_R = \frac{N}{\left(\frac{v\Delta t}{v+V}\right)} = \frac{N}{\Delta t} \frac{v+V}{v} = v_S \left(1 + \frac{V}{v} \right). \tag{1.12}$$

Pour un récepteur en mouvement vers une source fixe dans le milieu

$$v_R = v_S \left(1 + \frac{V}{v} \right). \tag{1.13}$$

Si le récepteur s'éloigne on remplace V par $-V$.

On peut déterminer si la source ou la récepteur se déplace par rapport au milieu en mesurant v_R avec une précision au moins de l'ordre $\left(\frac{V}{v}\right)^2$. On verra dans le cas de la lumière que cette distinction est impossible.

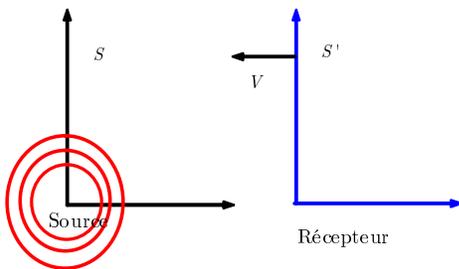


Figure 1.8 ▲ Une onde sphérique est émise par une source (S) au repos et captée par un récepteur (R) en mouvement par rapport au milieu de propagation.

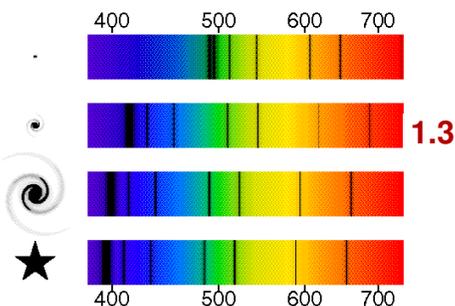


Figure 1.9 ▲ Les raies spectrales des éléments sont déplacées vers le rouge. On observe que plus l'étoile est distante plus le déplacement est important.

Références 1.1

- Simulation en java sur le site web : <http://webphysics.davidson.edu/Applets/Applets.html>
- <http://subaru.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/doppler.html>
- <http://www.walter-fendt.de/ph14f>



Application : récession des galaxies - « red shift »

L'observation spectroscopique de la lumière des galaxies montre que les raies spectrales des éléments sont déplacées vers le rouge (vers les basses fréquences), un déplacement qu'on peut attribuer à un effet Doppler dû à une vitesse de récession des sources. Nous verrons que les formules de l'effet Doppler acoustique sont valides pour la lumière si $V \ll c$:

$$v_R \simeq v_S \left(1 + \frac{V}{c} \right), \quad v_R < v_S \tag{1.14}$$

$$\implies V < 0$$

\implies éloignement des galaxies

$$\frac{v_R}{v_S} - 1 = \frac{|\Delta v|}{v_S} = \frac{V}{c}, \quad \text{mesure la vitesse de récession.} \quad (1.15)$$

Notez que dans cette approximation où $V \ll c$, il n'est pas non plus nécessaire d'identifier si c'est la source qui est en mouvement, où a approximativement

$$\frac{v_R}{v_S} - 1 = \left(1 - \frac{V}{c}\right)^{-1} - 1 \simeq \frac{V}{c} \quad (1.16)$$

ou le récepteur où on a strictement

$$\frac{v_R}{v_S} - 1 = \frac{V}{c}$$

D'autres observations, capables de mesurer les distances, semblent indiquer que

$$\frac{|\Delta v|}{v_S} \propto r \quad (1.17)$$

où r est la distance. Il en résulte que $\frac{|v|}{c} \propto r$. C'est-à-dire que les galaxies s'éloignent avec une vitesse proportionnelle à leur distance : $V = \alpha r$

L'explication la plus simple de cette relation est le modèle cosmologique du *Big Bang* selon lequel l'univers aurait été formé d'une immense explosion initiale. Ainsi, les fragments les plus rapides sont présentement les plus éloignés.

Empiriquement, on a une constante de proportionnalité de

$$\frac{1}{\alpha} \simeq 3 \times 10^{17} \text{ s} \simeq 10^{10} \quad (1.18)$$

$$\frac{c}{\alpha} \sim 10^{26} \text{ m.} \quad (1.19)$$

Ces résultats seraient grossièrement l'âge et le rayon de l'univers.

Exemple 1.1

⚠ Certaines raies d'absorption du potassium (K et H) sont près de $\lambda = 395 \text{ nm}$. Dans la lumière d'une nébuleuse de la constellation Boötes on les observe à $\lambda \simeq 447 \text{ nm}$, d'où

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{52}{395} \simeq 0.13. \quad (1.20)$$

Supposons encore une fois que $V \ll c$ et que les formules de l'effet Doppler non-relativiste sont valides pour la lumière. La fréquence s'écrit $\nu = \frac{c}{\lambda}$. Il en découle donc que la variation de fréquence

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_S} = -\frac{\Delta \lambda}{\lambda_R} \simeq -\frac{\Delta \lambda}{\lambda_S} \simeq \frac{V}{c} \quad (1.21)$$

puisque $\frac{\Delta \lambda}{\lambda_S} \ll 1$. On obtient alors $|V| \simeq 0.132c$, ce qui est quand même très rapide !



Figure 1.10 ▲ Galilée (Galileo Galilei) 1564-1642

1.4 Repères inertiels en mouvement relatifs

Selon la transformation de Galilée des coordonnées dans des repères inertiels en mouvement relatifs par une vitesse constante \mathbf{V} :

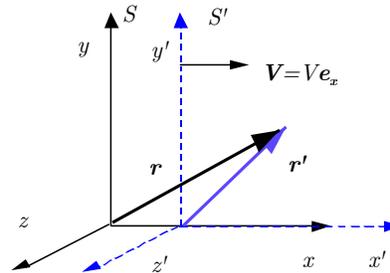
$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \mathbf{V}t \\ t &= t' \end{aligned}$$

©1998-2018 L. Marleau — version 2018.12.08.11.20

et donc

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r}' + \mathbf{V}t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d(\mathbf{V}t)}{dt} \tag{1.22}$$

$$= \mathbf{v}' + \mathbf{V} \tag{1.23}$$



Toutefois, selon les transformations de Galilée, la vitesse de la lumière perçue par un récepteur s'approchant d'une source avec une vitesse V serait

$$c_R \stackrel{?}{=} c + V. \tag{1.24}$$

Malgré son caractère *raisonnable*, cette relation est incorrecte ; on observe

$$c_R = c \tag{1.25}$$

à partir de tout repère en mouvement par rapport à la source !

Remarque 1.1

i C'est le résultat expérimental fondamental ! La base de la formulation relativiste des lois de la physique ! **i**

Nous allons étudier une expérience conduisant à cette conclusion ; celle de Michelson et Morley démontrant que la vitesse de la lumière est indépendante de la vitesse de la terre sur son orbite.

1.5 Expérience de Michelson-Morley

Supposons d'abord, comme on l'a déjà cru, que la lumière, à l'instar du son, a besoin d'un milieu propageateur. Cet *éther* devrait déterminer la vitesse de la lumière. On ne saurait de plus accepter l'idée géocentrique que l'*éther* est fixe par rapport à la terre. Il serait plutôt un repère inertiel dans lequel la terre se déplace. L'expérience évidente consiste à mesurer la vitesse de la lumière en un point de la terre dans toutes les directions et en différents moments de l'année. Toutes les répétitions de cette expérience n'ont pas réussi à démontrer un mouvement de la terre par rapport à l'*éther* et conduisent donc à nier son existence.

Deux ondes lumineuses émanant d'une source monochromatique commune interfèrent en se superposant en un point donné. L'intensité lumineuse en ce point sera maximum ou minimum selon que les ondes y arrivent en phase ou en opposition de phase. La différence de phase peut être due à une différence de la distance parcourue par les deux ondes émises en phase par la source commune (voir figure 1.13).

Dans l'expérience de Michelson et Morley, un faisceau émanant de S est séparé en deux en A par un miroir semi transparent... (voir figure 1.14)

Lorsque cet interféromètre est au repos dans l'*éther*, les chemins optiques \overline{SABAD} et \overline{SACAD} sont égaux et la différence de phase est nulle. Un patron d'interférence est visible dans l'axe \overline{DA} . Lorsque l'interféromètre se déplace avec la terre dans l'*éther* avec une vitesse

Figure 1.11 Les deux repères inertiels S et S' , où S' se déplace à vitesse V par rapport à S , sont choisis de telle sorte que les axes Ox et Ox' glissent l'un sur l'autre. Au moment où les origines se confondent, les horloges marquent $t = t' = 0$.



Figure 1.12 Albert A. Michelson 1852-1931

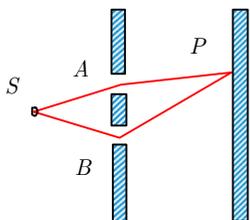


Figure 1.13 Lorsque qu'un signal lumineux S passe par des fentes A et B , on observe un patron d'interférence de la lumière au point P .

V dans la direction de l'axe \overline{AC} , les distances parcourues ne sont plus les mêmes. D'après la transformation de Galilée, on devrait avoir, par rapport à la terre, les vitesses de propagation $c - V$ pour le faisceau qui se propage selon \overline{AC} et $c + V$ pour le retour \overline{CA} . La durée du parcours est dans le repère de la Terre :

$$\Delta t(AC'A'') = \frac{D}{c-V} + \frac{D}{c+V} = \frac{2Dc}{c^2 - V^2} \quad (1.26)$$

$$\simeq \frac{2D}{c} \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) \quad (1.27)$$

si $V \ll c$, où D est la longueur des bras \overline{AC} , \overline{AB} , ou \overline{AD} de l'appareil.

Pour le faisceau réfléchi en B , le temps correspondant est dans le repère de l'éther (voir figure 1.15) :

$$\Delta t(AB'A'') = \frac{2l}{c} \quad \text{avec} \quad l^2 = \left(\frac{V}{c} l \right)^2 + D^2 \quad (1.28)$$

donc

$$\begin{aligned} \Delta t(AB'A'') &= \frac{2D}{c(1 - \frac{V^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} \\ &\simeq \frac{2D}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (1.29)$$

pour $V \ll c$.

La différence de temps à parcourir ces deux trajectoires est

$$\Delta t_1 = \Delta t(AC'A'') - \Delta t(AB'A'') \simeq \frac{DV^2}{c^3}. \quad (1.30)$$

Si on tourne l'interféromètre d'un angle $\frac{\pi}{2}$, la même différence de temps devient (voir figure 1.16)

$$\Delta t_2 \simeq -\frac{DV^2}{c^3}. \quad (1.31)$$

Cette rotation produit, entre les deux faisceaux, une différence de phase

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \omega(\Delta t_1 + |\Delta t_2|) \simeq \omega \left(\frac{2DV^2}{c^3} \right) \\ &\simeq \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{2DV^2}{c^3} = \frac{4\pi D}{\lambda} \frac{V^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Durant une telle rotation le patron d'interférence observé dans l'axe \overline{DA} devrait changer appréciablement si la terre se déplace à vitesse V dans l'éther. Avec $V = 2.978 \times 10^4$ m/s, vitesse orbitale de la terre, et $\frac{D}{\lambda} = 2 \times 10^6$ on devrait avoir $\Delta\phi = 0.2$ rad.

Depuis Michelson et Morley (1887), l'expérience fut reprise avec un degré de précision croissant¹ et on n'a jamais observé un $\Delta\phi$ mesurable ! On doit conclure de cette expérience négative que $\Delta\phi = 0$, c'est-à-dire que $V = 0$ où mieux, que l'éther n'existe pas !

Cette affirmation requiert toutefois quelques précisions. Notre compréhension actuelle de la nature en terme de la mécanique quantique suggère que le vide tel qu'on l'entend normalement (absence de toutes particules) n'est pas vraiment « vide ». À cause des fluctuations quantiques, pendant qu'un photon se propage il émet et réabsorbe continuellement des particules et antiparticules qui forment ce qu'on appelle le « vide quantique » ou la polarisation du vide.

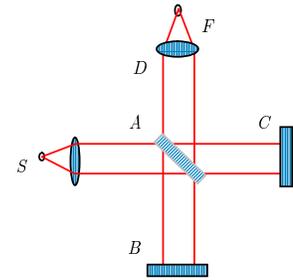


Figure 1.14 ▲

L'interféromètre de Michelson et Morley consiste en un système comprenant un faisceau émanant de S séparé en deux en A par un miroir semi-transparent. Après être réfléchi en C et B , les faisceaux reviennent en A et une partie parvient au point F où on observe un patron d'interférence.

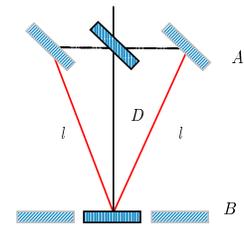


Figure 1.15 ▲

Aller-retour de la lumière entre les points A et B dans le repère inertiel de l'éther.

¹(Voir La Recherche, édition oct. 79, et Brilliet et Hall (Phys.Rev.Lett. 42, 549 (1979)).

Références 1.2

i Simulation en java sur le site web :
http://www.brainflux.org/Physics/Special_Relativity/Michelson_Morley/index.html
<http://subaru.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/optiphy/michelson.html>

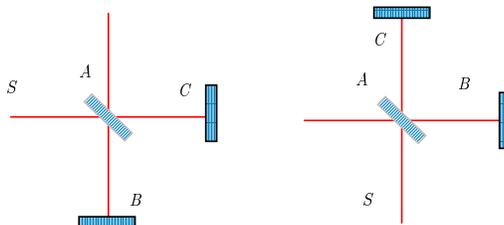


Figure 1.16 ◀▶ La rotation de l'interféromètre de Michelson-Morley aurait comme conséquence de déplacer le patron d'interférence si l'éther existait. Ce n'est pas le cas.

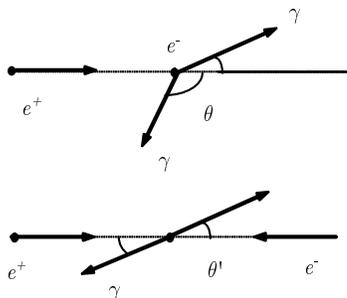


Figure 1.17 ▲ Expérience de Sadeh mettant en jeu des collisions $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$, où l'électron est au repos.

1.6 Invariance de la vitesse de la lumière

L'expérience de Michelson et Morley suggère aussi que la vitesse de la lumière est indépendante du mouvement de la source et du récepteur.

Cette invariance de la vitesse de la lumière est plus directement mise en évidence par l'expérience de Sadeh². Le positron et l'électron s'annihilent par l'émission de deux photons (voir figure 1.17)

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma. \tag{1.33}$$

Avec des positrons (émis par ⁶⁴Cu) de vitesse proche de c et dirigés sur des électrons au repos, Sadeh a observé que les deux photons atteignent simultanément des détecteurs équidistants de la cible. Ils ont donc tous les deux la même vitesse.

La source de ces photons est au centre de masse qui se déplace à la vitesse $\simeq \frac{c}{2}$. Puisqu'un photon est émis dans le sens général de la source et que l'autre est émis dans un sens presque opposé, il est manifeste que l'addition de vitesse de Galilée est ici inapplicable !

L'invariance de c signifie que l'onde sphérique émise par une source lumineuse ponctuelle apparaîtra sphérique à tout observateur d'un autre système inertiel (voir figure 1.18).

1.7 La vitesse ultime

Dans un accélérateur *Van de Graaff*, par exemple, on peut facilement soumettre des électrons à une différence de potentiel de 10^6 V et leur donner l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} T &= e\phi = 1 \text{ MeV} = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(10^6 \text{ V}) \\ &\simeq 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Un faisceau de N électrons par seconde, ainsi accélérés, délivrera une puissance de $N \times 1.6 \times 10^{-13}$ W dans une cible. Un thermocouple peut mesurer cette puissance. On peut donc déterminer expérimentalement l'énergie d'un électron ainsi accéléré.

Par une mesure de temps de vol on peut aussi mesurer directement la vitesse de ces électrons. Ces mesures conduisent à la courbe de la figure 1.19. Comme nous le verrons plus loin, la relation entre la vitesse $\beta = v/c$ et l'énergie cinétique T (en posant $c = 1$), s'écrit

$$v \equiv v(T) = \frac{\sqrt{T^2 + 2MT}}{M + T}.$$

La vitesse n'excède jamais $c = 1$ malgré l'augmentation de l'énergie cinétique.

- $T = \frac{1}{2}Mv^2$ ou $v^2 = \frac{2T}{M}$ n'est donc valide que pour $v \ll c$!
- c est la vitesse ultime.

²(Voir Sadeh, Phys.Rev.Lett., 271 (1963).)

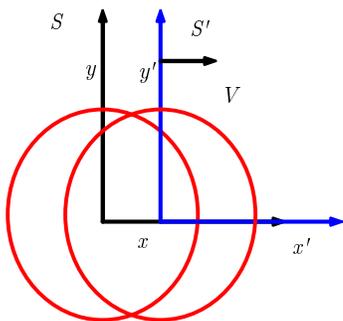


Figure 1.18 ▲ Les référentiels S et S' coïncident à l'émission en $t = t' = 0$. Puisque la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels, l'onde paraîtra sphérique quel que soit l'observateur.

Plusieurs accélérateurs et laboratoires modernes vérifient (implicitement) tous les jours que :

- c est invariant par rapport à tous les repères inertiels
- c est la vitesse maximum possible de toutes communications
- la transformation de Galilée est inadéquate aux grandes vitesses
- toutes les particules de masse nulle ($\gamma, \nu, \bar{\nu} \dots$) semblent se déplacer à cette vitesse c .

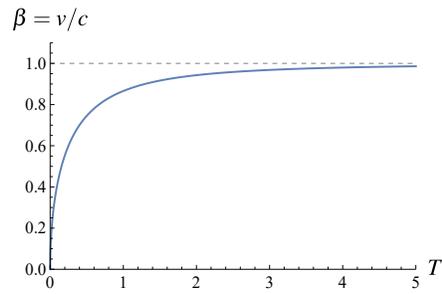


Figure 1.19 ◀▶

Relation entre la vitesse $\beta = v/c$ et l'énergie cinétique relativiste T (souvent aussi désignée par K).

1.8 Exercices

1.8.1 Vitesse de la lumière

1.1 Expérience de Roemer

La période de révolution de Jupiter est 12 fois plus longue que celle de la Terre. Aussi, considère-t-on que Jupiter est immobile sur un an par rapport à la Terre. La période orbitale τ de Io, lune de Jupiter, est de 42 heures. On détermine cette période en mesurant le temps séparant les éclipses de Io (passage de Io derrière Jupiter). Par contre, lorsque la Terre s'éloigne du système Jupiter-Io, sur une orbite presque circulaire de rayon R_t et à une vitesse v_t , la période des éclipses telle qu'observée sur notre planète augmente légèrement de $d\tau$. Cette augmentation est le résultat de la rotation de la Terre d'un angle $d\theta$ sur l'orbite, et ce, pendant que Io effectue une révolution complète autour de Jupiter.

- (a) Quel est le retard total $\Delta\tau$ accumulé pendant six mois d'observation ? On considère que l'axe Soleil-Terre fait un angle θ avec l'axe Soleil-Jupiter. En six mois, cet angle passe de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$ (Indice : il faut d'abord montrer que $d\theta \cong (v_t/R_t) d\tau$ puis utiliser $\Delta\tau = \int d\tau$.)
- (b) Selon les observations de Roemer en 1676, le retard accumulé durant les six mois était $d\tau = 22 \text{ min}$ alors que le diamètre terrestre était estimé à $2.829 \times 10^8 \text{ km}$. Quelle est la valeur de c que Roemer calcula ?
- (c) Étudiant modèle, vous décidez de reprendre la méthode de Roemer tout en utilisant les données actuelles : $R_t = 1.49 \times 10^8 \text{ km}$, $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$, $v_t = 30 \text{ km/s}$. Vous orientez vos observations du côté de Europa au lieu de Io étant donné sa période orbitale plus longue $\tau = 3.55$ jours. Quelle différence maximale de période $d\tau_{\text{max}}$ vous attendez-vous à observer ? Quel retard total $\Delta\tau$ devriez-vous observer pour six mois d'observation ?

1.2 L'athlète chantant

Un homme possède une voix dont la fréquence moyenne est v_i . Il désire confondre un auditeur de façon à ce que ce dernier entende grosso modo la fréquence v_f . À quelle vitesse l'émetteur doit-il courir et dans quelle direction ? On suppose que cet homme est un baryton ($v_i \sim 400 \text{ Hz}$) et qu'il désire se faire passer pour un haute-contre ($v_f \sim 2000 \text{ Hz}$). Peut-on obtenir le même résultat en ménageant le chanteur ? Si oui, comment ?

1.3 Le retard des éclipses de Io : une autre explication

On veut expliquer l'élongation des périodes orbitales (périodes des éclipses) de Io à l'aide de l'effet Doppler classique. On considère alors le système Jupiter-Io comme une source au repos émettant une lumière modulée à une fréquence $\nu = 1/42$ cycles par heure. Quelle variation de période subit ce signal lumineux lorsque l'effet Doppler est à son maximum ($v_t = 30 \text{ km/s}$) ? Est-ce une explication valable du retard observé ?

1.4 Petites vitesses

Montrez que pour de petites vitesses, on peut difficilement faire la différence entre le déplacement de la source et celui de l'observateur.

1.5 Fréquences

Une petite boîte émettant un son d'une fréquence de 540 Hz est attachée à une corde de 60 cm. Si quelqu'un fait tourner la corde à 15 rad/s, quelles sont les deux fréquences extrêmes que l'on peut entendre ?

1.6 Rouge ou vert

À quelle vitesse doit aller un automobiliste pour qu'il voit une lumière rouge comme étant une lumière verte ?

1.7 Transformations galiléennes

Généralisez les transformations galiléennes pour un repère se déplaçant à une vitesse v ayant des composantes en x , y et z par rapport à un système au repos.

1.8 Vitesse d'une nébuleuse

En mesurant la longueur d'onde de la lumière rougeâtre de l'hydrogène d'une nébuleuse lointaine, on obtient une valeur de 708 nm. Quel est la vitesse de cette nébuleuse par rapport à nous, si on sait que, sur terre, de l'hydrogène dans un tube néon produit de la lumière de 656 nm ?

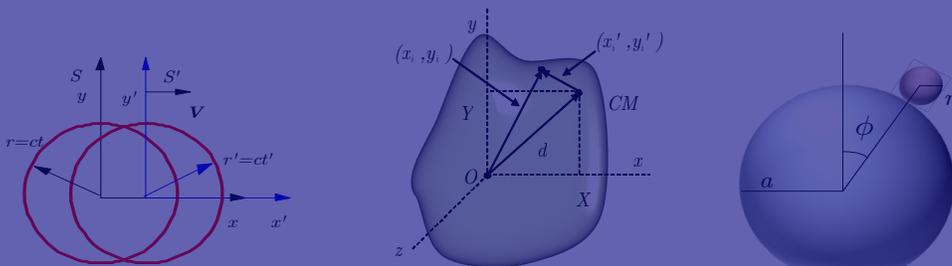
1.9 Ambulance

Un piéton se reposant sur un banc de parc entend venir une ambulance avec une fréquence v_1 (on suppose qu'il a une bonne oreille). Une fois dépassé par l'ambulance, le piéton entend une fréquence v_2 . Quelles sont :

- la vitesse de l'ambulance et
- la fréquence émise par cette dernière au repos ? (note : la vitesse du son dans l'air est d'environ 300m/s)



Principes de la relativité restreinte



Chapitre 2

- 2.1 Les principes fondamentaux . . . 13
- 2.2 Relativité et géométrie : les diagrammes espace-temps 17
- 2.3 L'intervalle et son invariance . . . 19
- 2.4 Classification des événements et temps propre 22
- 2.5 Limites de la relativité restreinte 24
- 2.6 Une nouvelle cinématique . . . 24
- 2.7 Exercices 27

La théorie que l'on appelle relativité restreinte a été élaborée dans un article d'Einstein paru en 1905. Cette théorie n'avait pas pour but d'élucider des phénomènes inexpliqués par la mécanique de Newton mais permettait plutôt, à la suite d'une réflexion sur le concept de temps, d'intégrer certains résultats connus de l'électromagnétisme de Maxwell en étendant le principe de relativité de Galilée à cette dernière.

2.1 Les principes fondamentaux

Voici les deux principes sur lesquels repose la relativité :

Postulat 2.1

Le principe de relativité : les lois de la physique doivent avoir la même forme dans tous les repères inertiels.

Postulat 2.2

Universalité de la vitesse de la lumière : la vitesse de la lumière est la même dans tous les repères inertiels. Cette vitesse ne dépend pas de l'état de mouvement de la source.

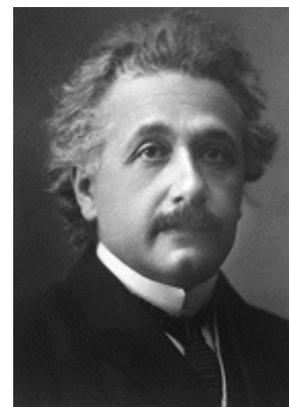


Figure 2.1 ▲
Albert Einstein 1879-1955

2.1.1 Le principe de relativité

Le principe de relativité avait été énoncé par Galilée pour les phénomènes mécaniques. On savait alors qu'il n'était pas possible de détecter la vitesse absolue d'un repère. Ce principe est contenu dans la loi d'addition des vitesses suivantes :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V} \tag{2.1}$$

où \mathbf{V} est la vitesse du repère S' par rapport au repère S .

Les équations de la mécanique de Newton sont *invariantes* sous cette loi de transformation. En effet, comme :

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d(\mathbf{v} - \mathbf{V})}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} \tag{2.2}$$

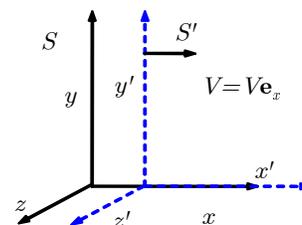


Figure 2.2 ▲
Les deux repères inertiels S et S' , où S' se déplace à vitesse V par rapport à S , sont choisis de telle sorte que les axes Ox et Ox' glissent l'un sur l'autre. Au moment où les origines se confondent, les horloges marquent $t = t' = 0$.

la forme de la deuxième loi ne change pas, étant entendu que les forces et la masse sont des quantités invariantes, c'est-à-dire elles ont la même valeur dans S et dans S' .

Nous allons introduire une notion importante en relativité restreinte, liée à la notion de repère inertiel : celle des observateurs inertiels.

La notion d'observateur :

Cette notion, mal comprise au début, a été la cause de bien des incompréhensions particulièrement de la part des philosophes (par exemple Bergson). Il faut d'abord préciser que l'observateur relativiste ne voit pas les phénomènes au sens habituel du mot voir. Il recueille plutôt des mesures de position et de temps en différents points de son repère. Ceci présuppose que l'on a placé en chaque point du repère une horloge et que cet ensemble d'horloges est synchronisé. Une observation consiste donc à recueillir, pour une chose qui se passe dans ce repère (un événement), un ensemble de valeurs pour la position (les coordonnées x, y et z) et une pour le temps (t).

Nous allons supposer que les repères en cause sont inertiels au sens des lois de Newton : le corps sur lequel n'agit aucune force est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

Pour des raisons de simplicité, nous considérerons dans ce qui va suivre deux repères inertiels S et S' , où S' se déplace à vitesse V par rapport à S , de telle sorte que les axes Ox et Ox' glissent l'un sur l'autre. On suppose également qu'au moment où les origines se confondent, les horloges marquent $t = t' = 0$ (voir figure 2.2).

Synchronisation des horloges

Synchroniser les horloges d'un repère, c'est faire en sorte que toutes les horloges de ce repère marquent la même heure en même temps. Cela suppose au départ que ces horloges marchent au même rythme, ce sur quoi il n'y a pas d'objection de principe.

Supposons que dans le repère S (ou S'), les horloges sont disposées régulièrement le long de l'axe Ox (ou Ox') et que les observateurs de chaque repère acceptent de considérer comme instant-origine le moment où les points O et O' coïncideront ; supposons de plus qu'un signal lumineux sera émis à cet instant. Nous supposons ici que ce signal servira à déclencher le départ de ces horloges.

Voyons, par exemple, comment l'observateur du repère S' devra préparer ses horloges avant que O et O' coïncident (voir figure 2.3).

Sur chacune des horloges, il place l'aiguille à l'instant où elle devra être au moment du déclenchement par le rayon lumineux c'est-à-dire à l'instant $t' = \frac{l}{c}$; ainsi sur les horloges G_1 et D_1 l'aiguille sera à $t'_1 = \frac{l_1}{c}$, sur les horloges G_2 et D_2 , elle sera à $t'_2 = \frac{l_2}{c}$ et ainsi de suite. L'horloge C , placée à l'origine, est évidemment à $t' = 0$.

Lorsque l'horloge C croise l'origine O du repère S , le signal lumineux sera émis, et quelques instants après, on observera dans S' que toutes les horloges marquent la même heure, c'est-à-dire qu'elles sont synchronisées (voir figure 2.4).

Comment l'observateur S juge-t-il la synchronisation des horloges du repère S' ? (voir figure 2.5 et 2.6).

La figure 2.5 montre la situation au moment de l'émission du signal lumineux. L'observateur S ne peut faire autrement que constater (voir figure 2.6) que le front L_g (qui va vers la gauche) rencontrera l'horloge G avant que le front d'onde L_d (qui va vers la droite) ne rencontre l'horloge D ; l'horloge G , selon lui, sera déclenchée avant l'horloge D . Les horloges de S' ne seront donc pas synchronisées selon l'observateur du repère S .

Évidemment, pendant que S' préparait ses horloges avant l'instant initial, S faisait la même chose dans son repère si bien que l'observateur S' arrive aussi à la conclusion que les horloges de S ne sont pas synchronisées mais que les siennes le sont.

Tous les deux ont raison et c'est là une des conséquences importantes des postulats de la relativité : la synchronisation est un phénomène relatif. On verra qu'il en découle que la simultanéité de deux événements est aussi quelque chose de relatif.

2.1.2 Universalité de la vitesse de la lumière

Le système d'unités SI (système international) requiert trois étalons de mesure :

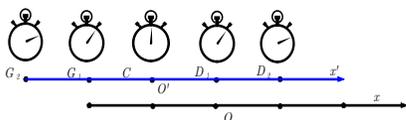


Figure 2.3 ▲ Les horloges sont disposées régulièrement le long de l'axe Ox (ou Ox') et les observateurs de chaque repère considèrent comme instant-origine le moment où les points O et O' coïncideront.

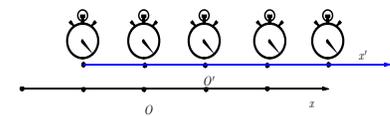


Figure 2.4 ▲ Lorsque l'horloge C croise l'origine O du repère S , le signal est émis. Après quelques instants, dans S' , les horloges sont synchronisées.

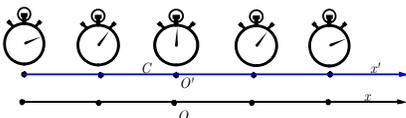


Figure 2.5 ▲ Émission d'un signal lumineux.

$$\begin{aligned} [\text{longueur}]_{\text{SI}} &= 1 \text{ m} \\ [\text{temps}]_{\text{SI}} &= 1 \text{ s} \\ [\text{masse ou énergie}]_{\text{SI}} &= 1 \text{ kg ou } 1 \text{ J} \end{aligned}$$

Mais étant donné le caractère fondamental donné à la vitesse de la lumière (c), il est plus *naturel* d'exprimer une vitesse comme une fraction de c .

$$\text{Vitesse} = \text{fraction de } c \quad (2.3)$$

Nous adopterons dans ce qui suit la convention que cette vitesse à la valeur 1 (sans dimensions), ce qui revient à dire que nous mesurerons le temps en mètre tout comme les distances. Pour convertir en SI, nous utiliserons les relations suivantes :

$$\underbrace{2.998 \times 10^8 \text{ m/s}}_{\text{SI}} = \underbrace{1}_{\text{SN}}$$

c'est-à-dire

$$\underbrace{1 \text{ s}}_{\text{SI}} = \underbrace{2.998 \times 10^8 \text{ m}}_{\text{SN}}$$

ou encore

$$\underbrace{3.3356 \times 10^{-9} \text{ s}}_{\text{SI}} = \underbrace{1 \text{ m}}_{\text{SN}}$$

On peut vérifier, par exemple, que la vitesse n'ayant pas de dimensions, on mesurera l'énergie en Joule (J), en MeV ou encore en kg

$$\begin{aligned} [E]_{\text{SI}} = \text{J} &\rightarrow [E]_{\text{SN}} = \text{J ou} \\ [E]_{\text{SI}} = \text{MeV} &\rightarrow [E]_{\text{SN}} = \text{MeV ou} \\ [E]_{\text{SI}} = \text{kg m}^2/\text{s}^2 &\rightarrow [E]_{\text{SN}} = \text{kg} \end{aligned}$$

tout comme l'impulsion

$$\begin{aligned} [p]_{\text{SI}} = \text{J s/m} &\rightarrow [p]_{\text{SN}} = \text{J ou} \\ [p]_{\text{SI}} = \text{MeV s/m} &\rightarrow [p]_{\text{SN}} = \text{MeV ou} \\ [p]_{\text{SI}} = \text{kg m/s} &\rightarrow [p]_{\text{SN}} = \text{kg} \end{aligned}$$

et l'accélération en m^{-1}

$$[a]_{\text{SI}} = \text{m/s}^2 \rightarrow [a]_{\text{SN}} = \text{m}^{-1},$$

etc.

On remarque donc de ces exemples que les unités de longueur et de temps coïncident

$$[\text{longueur}] = [\text{temps}] \quad (2.4)$$

Une quantité dans les unités SI qui possède des dimensions

$$E^p L^q T^r$$

où E , L et T représente les unités de masse, longueur et temps respectivement, aura des unités

$$E^p L^{q+r}.$$

Pour la conversion du système SI au SN (*système d'unités naturelles*) il suffit de multiplier les unités de secondes par c :

$$[T]_{\text{SI}} \rightarrow [Tc]_{\text{SI}} = [T]_{\text{SN}}$$

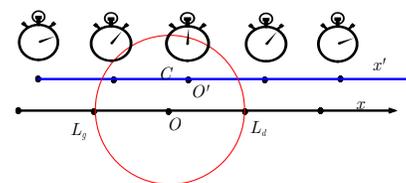


Figure 2.6 ▲

Pour l'observateur S , le front L_g (qui va vers la gauche) atteint l'horloge G avant que le front d'onde L_d (qui va vers la droite) ne rencontre l'horloge D ; donc l'horloge G , selon lui, sera déclenchée avant l'horloge D . Les horloges de S' ne paraissent donc pas synchronisées selon l'observateur du repère S .

2. Principes de la relativité restreinte

et donc une quantité arbitraire

$$E^p L^q T^r \rightarrow [E^p (L)^q (Tc)^r]_{SI} = [E^p L^{q+r}]_{SN}$$

où les quantités dans les crochets $[A]_{SN}$ et $[A]_{SI}$ sont exprimées en unités SN et SI respectivement. C'est-à-dire que l'unité de temps, la seconde s est remplacé par $2.998 \times 10^8 m$.

$$\text{Temps : } s \rightarrow 2.998 \times 10^8 m.$$

Inversement, tous les temps en unités SN doivent être convertis en secondes en passant aux unités SI

$$\left[\frac{T}{c} \right]_{SN} = [T]_{SI}$$

c'est-à-dire que l'unité de temps m est remplacé par $(3 \times 10^{-8})^{-1} s$.

$$\text{Temps : } m \rightarrow 0.333.. \times 10^{-8} s.$$

Exemple 2.1

Par exemple, considérons une accélération $a = 9.8 m \cdot s^{-2}$ possède les unités

$$[a]_{SI} = [L^1 T^{-2}]_{SI} \rightarrow [a]_{SN} = [L^{-1}]_{SN} = [(L)^1 (Tc)^{-2}]_{SI}$$

Numériquement

$$\begin{aligned} [a]_{SN} &= 9.8 m/s^2 \frac{1}{(2.998 \times 10^8 m/s)^2} \\ &= 9.8 (2.998 \times 10^8)^{-2} m^{-1} \\ &= 1.0903 \times 10^{-16} m^{-1} \end{aligned}$$

Autrement dit, il suffit de remplacer $1 s$ par $(3 \times 10^{-8} m \cdot s^{-1})$ là où elle apparaît dans les unités SI.

Inversement, pour une accélération de $1 m^{-1}$

$$[a]_{SN} \rightarrow [a]_{SI} = [L^1 T^{-2}]_{SI} = [L^{-1} c^2]_{SN}$$

$$\begin{aligned} [a]_{SI} &= 1 m^{-1} \times (2.998 \times 10^8 m/s)^2 \\ &= (2.998 \times 10^8)^2 m/s^2 \\ &= 8.988 \times 10^{16} m/s^2 \end{aligned}$$

Le passage aux unités SI requiert un facteur de conversion de c^2 par analyse dimensionnelle, puisque que l'on sait que les unités d'accélération doivent être des m/s^2

Autrement dit, du SI au SUN, on remplace simplement le joule, le mètre et la seconde par les facteurs suivant

$$\begin{aligned} \text{Énergie :} & \quad J \text{ (ou MeV)} \rightarrow J \text{ (ou MeV)} \\ \text{Longueur :} & \quad m \rightarrow m \\ \text{Temps :} & \quad s \rightarrow 2.998 \times 10^8 m. \end{aligned}$$

Inversement, du SUN au SI, il faut connaître le contenu énergie-longueur-temps associé à une quantité pour effectuer la conversion :

$$\begin{aligned} \text{Énergie :} & \quad J \text{ (ou MeV)} \rightarrow J \text{ (ou MeV)} \\ \text{Longueur :} & \quad m \rightarrow m \\ \text{Temps :} & \quad m \rightarrow 3.3356 \times 10^{-9} s \end{aligned}$$

avec

$$1 \text{ J} = 6.24 \times 10^{12} \text{ MeV}$$

$$1 \text{ MeV} = 1.602 \times 10^{-13} \text{ J}$$

Voici quelques exemples de conversion :

	SI	SN
Quantité		
Vitesse de la lumière	$2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$	1
Vitesse	V	$\beta = V/c$ (fraction de c)
Masse	1 kg	1 kg
Longueur	1 m	1 m
Temps	1 s	$2.998 \times 10^8 \text{ m}$
Impulsion	$1 \text{ MeV}/c$	1 MeV
Énergie	1 MeV	1 MeV

Les unités **MeV** (Méga-électron-Volt) sont des unités d'énergie équivalente à $10^6 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-13} \text{ J}$.

Le SN possède donc les avantages suivants :

1. moins d'unités fondamentales
2. simplification des équations en posant $c = 1$.

Équation SI	$\xrightarrow{c \rightarrow 1}$	Équation SN
$\gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$		$\gamma = (1 - V^2)^{-\frac{1}{2}}$
$E = mc^2$		$E = m$
$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$		$E = \sqrt{p^2 + m^2}$
$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$		$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2}}$

2.2 Relativité et géométrie : les diagrammes espace-temps

Il est essentiel d'être à l'aise avec la géométrie de la relativité restreinte. Pour y arriver nous utiliserons un outil graphique pour mieux visualiser les événements et phénomènes comme des positions d'espace-temps : **les diagrammes espace-temps, aussi appelé diagrammes de Minkowski**. Les **diagrammes d'espace-temps** mettent à profit la géométrie particulière, dite **de Minkowski**, de la relativité restreinte.

Dessinés sur un plan, ces diagrammes n'auront que deux dimensions (x et t) (voir figure 2.7). Définissons d'abord quelques objets :

Vocabulaire :

- a) **Événement \mathcal{E}** : un point dans l'espace-temps ;
- b) **Ligne d'univers de la lumière** : trajectoire d'un photon dans l'espace-temps. Elle est identifiée à une ligne à 45° dans le diagramme ;
- c) **Ligne d'univers d'une particule** : trajectoire de la particule dans l'espace-temps. Celle-ci ayant une vitesse $v \leq 1$ (comme nous le verrons plus loin), sa ligne d'univers fait un angle plus petit que 45° avec l'axe t . La vitesse de la particule v correspond à l'inverse de la pente de la ligne d'univers soit $v = \tan \alpha$ où α est l'angle entre la trajectoire et l'axe du temps

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \tan \alpha$$

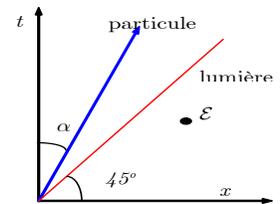


Figure 2.7 ▲ Diagramme espace-temps et lignes d'univers. (À noter que les axes sont inversés par rapport à l'usage commun).

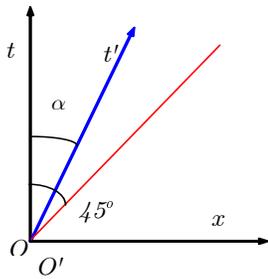


Figure 2.8 ▲ Système de coordonnées S' sur un diagramme d'espace temps: l'axe-temps de S' (c'est-à-dire $O't'$) correspond à la ligne d'univers de l'origine du repère S' tel que vu dans S .

Notation :

- a) Les lettres cursives ($\mathcal{E}, \mathcal{R}, \mathcal{P}$, etc.) seront utilisées pour désigner les événements ;
- b) Les coordonnées seront appelées t, x, y et z . Cependant, dans des expressions plus formelles, on emploiera par exemple, la notation x^μ où μ prend les valeurs 0, 1, 2 et 3. Ainsi $x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y$ et $x^3 = z$. Les valeurs 0, 1, 2 et 3 ne sont pas des exposants mais des indices.

Dans certains cas, on pourra utiliser la notation x^i où i prendra les valeurs 1, 2 et 3. On aura donc : $x^1 = x, x^2 = y$ et $x^3 = z$.

Remarque 2.1

i En résumé, les indices grecs $\mu, \nu, \rho \dots$ etc., prennent les valeurs 0, 1, 2 et 3 tandis que les indices latins i, j, k , etc., prennent les valeurs 1, 2 et 3.

L'utilisation des diagrammes espace-temps est d'autant plus utile qu'elle permet la représentation simultanée des points de vue des observateurs dans S et dans S' et en principe de tout autre repère inertiels. Voici comment ceux-ci sont construits.

2.2.1 Système de coordonnées d'un autre observateur

Nous venons de voir comment on peut représenter des événements pour l'observateur du repère S . Qu'en est-il pour un observateur dans un repère S' se déplaçant à vitesse V par rapport à S ? Nous allons essayer de représenter sur un même diagramme les deux points de vue (voir figure 2.8).

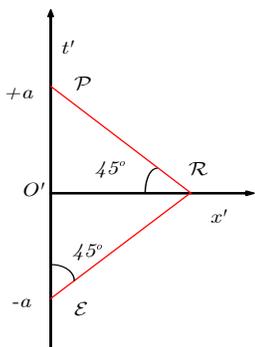


Figure 2.9 ▲ Trajet des rayons lumineux dans S' .

- *L'axe du temps de S'* (c'est-à-dire $O't'$) : Cet axe est le lieu des points pour lesquels $x' = 0$ c'est-à-dire la ligne d'univers de l'origine du repère S' tel que vu dans S . C'est donc une droite qui fait avec l'axe Ot un angle inférieur à 45° .
- *L'axe de l'espace de S'* (c'est-à-dire $O'x'$) : C'est le lieu des événements, dans le repère S' , qui sont simultanés avec l'événement-origine (rencontre de O et O'). Pour trouver ce lieu, nous aurons recours à une construction géométrique faisant intervenir les principes énoncés plus haut. Plaçons-nous dans S' et supposons qu'un rayon lumineux a été émis au point O' , à l'instant $t' = -a$ (événement \mathcal{E}). On suppose que le rayon est réfléchi en $x' = a$ (événement \mathcal{R}) et qu'il repasse par l'origine à l'instant $t' = +a$ (événement \mathcal{P}), la valeur a étant arbitraire (voir figure 2.9).

Reprenons le diagramme initial et essayons d'y placer les événements \mathcal{E}, \mathcal{R} et \mathcal{P} . \mathcal{E} et \mathcal{P} correspondent à $t' = \pm a$ sur l'axe des t' . Il est facile dans un premier temps de placer l'événement \mathcal{R} , on trace des droites à 45° représentant des rayons lumineux. L'intersection de ces droites nous donne \mathcal{R} . Il suffit de tracer une droite passant par ce point et par l'origine, pour avoir l'axe Ox' . La géométrie nous montre que cet axe Ox' est disposé symétriquement par rapport à la droite-lumière (voir figure 2.10). Il est important de remarquer que nous n'avons pas encore introduit d'étalonnage sur les axes ; cela viendra plus loin.

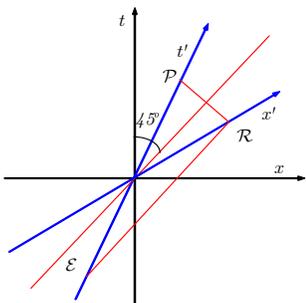


Figure 2.10 ▲ Trajet des rayons lumineux dans un diagramme espace-temps.

On voit aisément, par exemple, que deux événements simultanés dans un repère ne le sont pas dans l'autre (voir figure 2.11). Dans S , de tels événements sont sur une droite parallèle à l'axe Ox , donc perpendiculaire à l'axe Ot . Par contre dans S' , les projections de ces événements sur l'axe $O't'$ montrent des instants différents (les projections se font toujours parallèlement aux axes). Cette simultanéité relative vient du fait que la vitesse de la lumière a une grandeur finie. Cela avait échappé à Newton et à ses successeurs. En faisant du temps une quantité absolue, Newton supposait implicitement une synchronisation des horloges à l'aide d'un signal de vitesse infinie.

Les diagrammes suivants représentent la même situation physique. À la figure 2.12, on a la représentation de S' dont la vitesse est V vers la droite le long de Ox tandis qu'à la figure 2.13, on a la représentation telle que vue dans S' pour qui S se déplace avec une vitesse V vers la gauche. Il est aussi possible de placer plus de deux référentiels ($S, S', S'', S''' \dots$) sur le même diagramme.

2.3 L'intervalle et son invariance

Considérons deux événements \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 reliés par un rayon lumineux (voir figure 2.14). Dans S , on a

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_2 - t_1, \\ \Delta x &= x_2 - x_1, \\ \Delta y &= y_2 - y_1, \\ \Delta z &= z_2 - z_1.\end{aligned}$$

Puisque la lumière se propage à c , le délai entre l'émission et la réception est

$$\Delta t = \frac{\Delta r}{c} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}{c}$$

ou encore

$$(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = 0 \quad (2.5)$$

en raison du fait que nous avons posé $c = 1$. De la même façon, dans S' , on a

$$\begin{aligned}\Delta t' &= t'_2 - t'_1, \\ \Delta x' &= x'_2 - x'_1, \\ \Delta y' &= y'_2 - y'_1, \\ \Delta z' &= z'_2 - z'_1.\end{aligned}$$

En raison de l'universalité de c , le délai entre l'émission et la réception est

$$\Delta t' = \frac{\Delta r'}{c} = \frac{\sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2}}{c}$$

et on obtient aussi

$$(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = 0. \quad (2.6)$$

Nous allons maintenant introduire une des notions les plus fondamentales de la relativité restreinte : l'intervalle.

Supposons deux événements quelconques séparés dans l'espace de Δx , Δy et Δz et dans le temps de Δt . On appelle intervalle entre ces événements la quantité

$$\Delta s^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2. \quad (2.7)$$

¹En relation avec ce que l'on vient tout juste de voir, on constate que si Δs^2 est nul pour deux événements donnés, $\Delta s'^2$ est également nul. Qu'en est-il pour deux événements quelconques ?

En géométrie tridimensionnelle, la quantité

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \quad (2.8)$$

est appelée distance entre deux points. Cette quantité conserve sa valeur lors d'une rotation du système de coordonnées, c'est-à-dire que dans le nouveau repère

$$\begin{aligned}\Delta r &= \Delta r' \\ (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 &= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2.\end{aligned}$$

Voyant dans la définition de l'intervalle une analogie avec celle de la distance en $3D$, nous allons accepter qu'il y a une invariance de l'intervalle lors d'un passage des coordonnées de $S(t, x, y, z)$ aux coordonnées de $S'(t', x', y', z')$:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2. \quad (2.9)$$

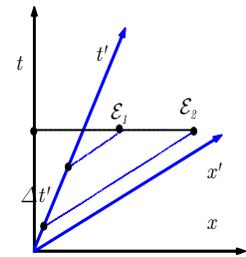


Figure 2.11 ▲

Deux événements simultanés dans S ne le sont pas dans S' . Pour le système S' , on détermine les coordonnées (x', t') en se déplaçant parallèlement aux axes $O't'$ et $O'x'$ pour atteindre les axes $O'x'$ et $O't'$ respectivement.

Ce qui suit est une démonstration importante de l'invariance de l'intervalle, c'est-à-dire de la dernière équation. On peut admettre que les relations mathématiques entre les coordonnées du repère S' et celles du repère S sont des relations linéaires. En effet, cela revient à admettre qu'il n'y a pas de déformation de l'espace selon la distance à l'origine ni de déformation du temps selon l'endroit où on se trouve dans le repère. (Dans le cas contraire, il faudrait faire appel à la relativité générale.) Alors en général

$$\begin{aligned} \Delta t' &= a_{00}\Delta t + a_{01}\Delta x + a_{02}\Delta y + a_{03}\Delta z \\ \Delta x' &= a_{10}\Delta t + a_{11}\Delta x + a_{12}\Delta y + a_{13}\Delta z \\ \Delta y' &= \dots \\ \Delta z' &= \dots \end{aligned}$$

Ainsi les quantités t', x', y' et z' sont des combinaisons linéaires des quantités t, x, y et z et l'on peut écrire :

$$(\Delta s')^2 = (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \tag{2.10}$$

En utilisant les relations linéaires précédentes, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} (\Delta t')^2 &= (a_{00}\Delta t + a_{01}\Delta x + a_{02}\Delta y + a_{03}\Delta z)^2 \\ &= a_{00}^2(\Delta t)^2 + 2a_{00}a_{01}(\Delta t)(\Delta x) + \dots \end{aligned}$$

et que $(\Delta s')^2$ s'écrira sous la forme

$$\begin{aligned} (\Delta s')^2 &= (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \\ &= M_{00}(\Delta x^0)(\Delta x^0) + M_{01}(\Delta x^0)(\Delta x^1) + \dots \\ &\quad + M_{10}(\Delta x^1)(\Delta x^0) + M_{11}(\Delta x^1)(\Delta x^1) + \dots \\ &\quad + \dots \\ &= \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 M_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta) \end{aligned}$$

où α et β prennent les valeurs 0, 1, 2, 3 ; les coefficients $M_{\alpha\beta}$ peuvent être des fonctions de \mathbf{V} , la vitesse relative des deux repères.

On peut supposer que M est symétrique, c'est-à-dire

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} \text{ pour tout } \alpha \text{ ou } \beta$$

étant donné que seules les sommes $M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}$ apparaissent dans l'équation (2.10)

La relation

$$(\Delta s')^2 = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 M_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta) \tag{2.11}$$

doit être valide pour $(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 = 0$. Appliquons celle-ci au cas $(\Delta s)^2 = 0$. Ceci nous permet d'écrire à partir de (2.5),

$$\begin{aligned} \Delta t &= \Delta r \\ \Delta r &= \left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{2.12}$$

quantités que l'on substitue dans l'équation (2.10) d'où :

$$\begin{aligned} (\Delta s')^2 &= M_{00}(\Delta r)^2 + 2 \sum_{i=1}^3 M_{0i}(\Delta x^i)\Delta r \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 M_{ij}(\Delta x^i)(\Delta x^j). \end{aligned} \tag{2.13}$$

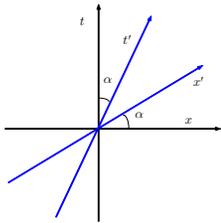


Figure 2.12 ▲
Représentation de S' ayant une vitesse V vers la droite le long de Ox .

¹Dans la littérature, on retrouve aussi la définition $\Delta s^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$. Cela correspond à la convention de signes $(-, +, +, +)$ pour la métrique, par opposition à celle que nous avons choisie partout dans le

Mais, nous avons vu que $(\Delta s')^2 = 0$ lorsque $(\Delta s)^2 = 0$, alors

$$0 = M_{00}(\Delta r)^2 + 2\Delta r \sum_{i=1}^3 M_{0i}(\Delta x^i) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 M_{ij}(\Delta x^i)(\Delta x^j). \quad (2.14)$$

Puisque cela doit être vrai pour des valeurs arbitraires de Δx^i , il en découle que chacune des contributions au deuxième terme doit être nulle

$$M_{0i} = 0; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

et que la somme dans le troisième terme doit annuler exactement le premier terme qui est proportionnel à $(\Delta r)^2$ alors

$$0 = M_{00}(\Delta r)^2 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 M_{ij}(\Delta x^i)(\Delta x^j). \quad (2.16)$$

Ceci est possible seulement si

$$M_{ij} = -M_{00}\delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.17)$$

où δ_{ij} est le delta de Kronecker, ainsi défini :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}. \quad (2.18)$$

L'équation (2.10) peut donc s'écrire :

$$(\Delta s')^2 = M_{00} [(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2]. \quad (2.19)$$

Si M_{00} ne dépend pas de Δx^i , il peut dépendre de la vitesse entre les repères. Si nous définissons une fonction

$$f(\mathbf{V}) = M_{00} \quad (2.20)$$

nous arrivons au résultat suivant : l'universalité de la vitesse de la lumière implique que les intervalles $(\Delta s)^2$ et $(\Delta s')^2$ entre deux événements satisfont la relation :

$$(\Delta s')^2 = f(\mathbf{V})(\Delta s)^2 \quad (2.21)$$

Il nous reste à montrer que $f(\mathbf{V}) = 1$.

Pour y arriver, considérons une règle placée perpendiculairement à l'axe Ox , dans S avec le talon à l'origine. Cette règle sera donc perpendiculaire à l'axe Ox' et à la vitesse du repère S' par rapport à S , étant donné notre convention, depuis le début, de faire glisser les axes Ox et Ox' l'un sur l'autre. Nous supposons que cette règle coïncide avec l'axe Oy , ce qui n'enlève rien à la généralité de la démonstration.

Supposons que l'observateur de S' a aussi une règle semblable disposée le long de Oy' et qu'il a attaché un pinceau à la marque de 1 m, pour fixer les idées. Faisant l'hypothèse que la règle en mouvement de S' est plus courte, l'observateur de S s'attend donc à voir la trace du pinceau à 0.99 m, disons. Que pense S' ? Il voit venir vers lui une règle de S ; elle doit donc être plus courte donc il s'attend à laisser sa trace à 1.01 m.

Il est bien entendu que cette trace ne peut se faire à deux endroits en même temps et la seule conclusion que l'on peut tirer c'est que les distances perpendiculaires à la vitesse \mathbf{V} sont les mêmes pour les deux observateurs. Donc,

$$(\Delta y)^2 = (\Delta y')^2 \quad (2.22)$$

$$(\Delta z)^2 = (\Delta z')^2 \quad (2.23)$$

d'où $M_{22} = M_{33} = -1$. Puisque $-M_{22} = -M_{33} = -M_{11} = M_{00} = f(\mathbf{V})$ alors $f(\mathbf{V}) = 1$ et

$$(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2. \quad (2.24)$$

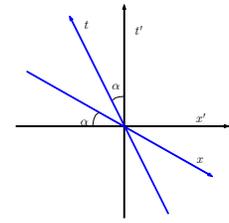


Figure 2.13 ▲ Représentation telle que vue dans S' pour qui S se déplace avec une vitesse \mathbf{V} vers la gauche.

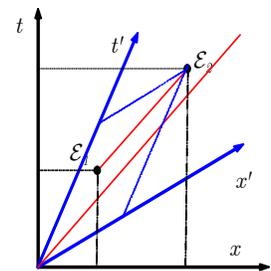


Figure 2.14 ▲ Diagrammes espace-temps pour deux événements \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 reliés par un rayon lumineux.



Remarque 2.2

i Sous forme matricielle, le traitement précédent prendrait la forme

$$X' = AX$$

avec

$$X' = \begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Définissant la matrice D

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

l'intervalle s'écrit dans le système S'

$$(\Delta s')^2 = X'^T D X'$$

Alors utilisant $X' = AX$

$$(\Delta s')^2 = (AX)^T D AX = X^T (A^T D A) X = X^T M X$$

avec M

$$M = (A^T D A)$$

L'invariance de l'intervalle que nous venons de démontrer implique donc que

$$(\Delta s')^2 = X^T M X = X^T D X = (\Delta s)^2$$

ou

$$M = D.$$



Pour résumer :

- Une des conséquence de l'universalité de la vitesse de la lumière se traduit par l'invariance de la quantité appelée l'intervalle

$$(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2. \tag{2.25}$$

- Dans la direction y et z , il n'y a aucun mouvement relatif donc les distances le long de ces axes ne sont pas affectées alors $f(\mathbf{V}) = 1$.

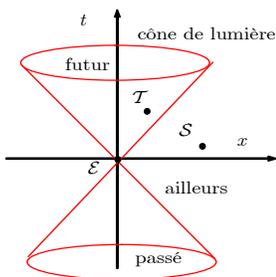


Figure 2.15 ▲
L'ensemble des événements contenus dans le cône inférieur forment le passé absolu de \mathcal{E} ; ceux du cône supérieur, le futur absolu de \mathcal{E} (événements du genre-temps). Les événements à l'extérieur du cône constituent l'ailleurs de \mathcal{E} (événements du genre-espace).

2.4 Classification des événements et temps propre

Une notion importante sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre suivant est celle du temps propre. On appelle *temps propre* (τ) le temps mesuré entre deux événements par l'horloge du repère dans lequel les deux événements se situent au même endroit (même coordonnées d'espace). Puisque dans ce cas, il n'y a eu aucun déplacement

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= (\Delta t)^2 - (\Delta r)^2 = (\Delta t)^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire, le temps propre est l'intervalle.

Par ailleurs on peut se servir de l'intervalle $(\Delta s)^2$ pour déterminer la relation entre deux événements. Cette quantité détermine en quelque sorte l'écart entre le carré de la distance que parcourerait la lumière pendant le temps $(\Delta t)^2$ et le carré de la distance en les deux événements $(\Delta r)^2$. Qui plus est, l'intervalle est une quantité indépendante des observateurs (ou invariante). On peut donc caractériser une paire d'événements de la façon suivante :

- Si l'intervalle entre deux événements (\mathcal{E} et \mathcal{S}) est négatif, on dira qu'il est du *genre-espace* ;

$$(\Delta s)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 < 0$$

ou

$$\underbrace{(\Delta t)^2}_{\text{distance parcourue par la lumière}} < \underbrace{(\Delta r)^2}_{\text{distance entre les événements}}$$

- Si l'intervalle est positif (\mathcal{E} et \mathcal{S}), on dira qu'il est du *genre-temps*

$$(\Delta s)^2 > 0$$

ou

$$\underbrace{(\Delta t)^2}_{\text{distance parcourue par la lumière}} > \underbrace{(\Delta r)^2}_{\text{distance entre les événements}}$$

- Alors que s'il est nul, on le dira du *genre-lumière*.

$$(\Delta s)^2 = 0$$

ou

$$\underbrace{(\Delta t)^2}_{\text{distance parcourue par la lumière}} = \underbrace{(\Delta r)^2}_{\text{distance entre les événements}}$$

Par rapport à un événement donné \mathcal{E} , l'ensemble des événements contenus dans le cône inférieur forment le *passé absolu* de \mathcal{E} ; ceux du cône supérieur, le *futur absolu* de \mathcal{E} (événements du *genre-temps*). Ceux qui sont à l'extérieur du cône constituent l'*ailleurs* de \mathcal{E} (événements du *genre-espace*). (voir figure 2.15).

$$(\Delta s)^2 < 0 \quad ; \quad \text{genre-espace (causalité impossible)}$$

$$(\Delta s)^2 > 0 \quad ; \quad \text{genre-temps (causalité possible)}$$

$$(\Delta s)^2 = 0 \quad ; \quad \text{genre-lumière (causalité possible par lumière)}$$

On voit donc que chaque événement a son passé, son futur et son ailleurs. Quant au présent, il n'existe à toutes fins pratiques qu'en un point.

Cette façon de voir est radicalement différente de celle qui avait prévalu jusqu'en 1905 où le temps était quelque chose d'absolu.

2.4.1 Relation de causalité

Puisque les coordonnées des temps changent d'un observateur à l'autre, on serait en droit de se demander si l'ordre dans lequel se déroule deux événements est le même pour tous les observateurs.

Dans la négative, cette possibilité modifierait la notion de causalité (relation de cause à effet) en permettant pour certains observateurs d'observer l'effet avant la cause.

En fait, il est facile de démontrer en utilisant un diagramme d'espace-temps que le principe de causalité est préservé.

Posons un événement \mathcal{E} en $t_{\mathcal{E}} = 0$ qui est la cause de l'événement \mathcal{F} en $t_{\mathcal{F}} \geq 0$. Ce dernier événement doit se trouver dans le futur absolu de \mathcal{E} , c'est-à-dire dans le cône supérieur du diagramme et

$$(t_{\mathcal{F}} - t_{\mathcal{E}}) \geq 0$$

et bien sûr, il faut que l'intervalle soit $(\Delta s)^2 \geq 0$. Alors pour un référentiel quelconque S' , l'axe $O't'$ se trouve aussi dans le cône et il est évident que $t'_{\mathcal{E}} = 0$ et que la coordonnée temps de l'événement \mathcal{F} sera $t'_{\mathcal{F}} \geq 0$. Donc quel que soit l'observateur, l'événement \mathcal{E} précède l'événement \mathcal{F} dans S aussi bien que dans S' .

$$t'_{\mathcal{F}} \geq t'_{\mathcal{E}}$$

Le choix de $t_{\mathcal{E}} = t'_{\mathcal{E}} = 0$ étant arbitraire, la conclusion s'applique à toute paire d'événement relié causalement

On peut aisément admettre que l'événement \mathcal{F} de la figure 2.15 ne peut être l'effet de l'événement \mathcal{E} car la distance (selon Ox) est trop grande pour qu'un rayon lumineux ait pu connecter ces deux événements. Il n'y a donc pas de relation de causalité (ou de cause à effet) entre les deux événements. Il en est de même pour tous les événements de l'ailleurs de \mathcal{E} ; ainsi l'événement \mathcal{E} ne peut être l'effet d'aucun événement situé dans l'ailleurs-passé.

Par contre, une relation de causalité est possible entre \mathcal{E} et \mathcal{F} qui est dans le futur absolu de \mathcal{E} . En effet, il est possible qu'un rayon lumineux ou qu'un signal moins rapide ait connecté ces deux événements, ce qui veut dire que \mathcal{E} pourrait être la cause de \mathcal{F} . De même \mathcal{E} peut être l'effet de tout événement faisant partie de son passé absolu.

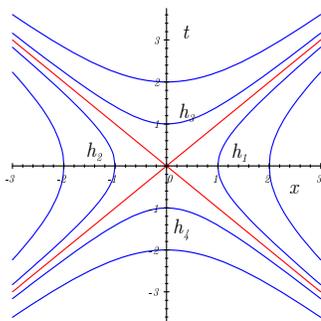


Figure 2.16 ▲ Calibration des axes: Les deux branches d'hyperboles (h_1 et h_2) correspondent à des événements de genre-espace par rapport à l'événement \mathcal{O} (l'origine) alors que Les deux branches d'hyperboles (h_3 et h_4) correspondent à des événements de genre-temps.

Limites de la relativité restreinte

Il est bon de rappeler les limites dans lesquelles nous travaillons ici, c'est-à-dire les limites d'application de la relativité restreinte :

- Les systèmes considérés sont des systèmes inertiels. On parle donc ici de systèmes qui ont des vitesses rectilignes uniformes donc absence de toute accélération.
- La gravitation est nulle ou négligeable. La métrique (de Minkowski) est donc plate. Dans le cas contraire, nous aurions à introduire une métrique courbe est devrions passer à la relativité générale pour traiter le problème.
- Les masses et énergies totales sont réelles et positives. Nous ne considérons pas d'objets exotiques comme des tachyons.
- Dans la limite où les vitesses sont petites par rapport à c , les effets relativistes peuvent être négligés à la faveur de la mécanique de Newton.

2.6 Une nouvelle cinématique

Nous allons pousser un peu plus loin notre analyse des conséquences des deux principes de la relativité restreinte en étudiant de façon plus détaillée la géométrie quadridimensionnelle qui découle de l'invariance de l'intervalle. Pour des raisons de simplicité, nous resterons dans le plan qui contient les axes x et t .

2.6.1 Graduation des axes

Dans tous les repères inertiels, la quantité $t^2 - x^2$ est la même. Posons donc l'équation

$$t^2 - x^2 = -1$$

qui donne deux branches d'hyperboles (h_1 et h_2) qui sont les lieux d'événements de genre-espace par rapport à l'événement \mathcal{O} (l'origine). $(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 = -1$ pour tous ces événements (voir figure 2.16).

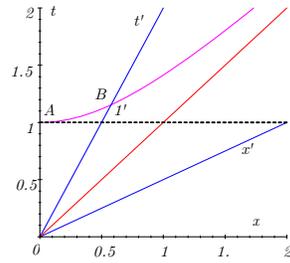


Figure 2.17 ◀▶
Durée de temps de 1 m dans les deux systèmes S et S'.

D'autre part, $t^2 - x^2 = 1$ donne deux branches d'hyperbole (h_3 et h_4) qui sont les lieux d'événements du genre-temps par rapport à \mathcal{O} et pour lesquels $(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 = 1$. On remarque que toutes ces hyperboles sont asymptotiques aux droites de pente ± 1 , c'est-à-dire des droites-lumières.

Prenons l'hyperbole h_3 dont l'équation s'écrit

$$t^2 - x^2 = 1 = t'^2 - x'^2$$

Pour $x = 0$, l'intersection avec l'axe temps Ot nous donne l'événement qui survient à l'origine après une durée de $t = 1$ m (temps)

$$\mathcal{A} : (t, x) = (1 \text{ m}, 0 \text{ m})$$

(voir figure 2.17). De même, sur cette hyperbole, l'intersection avec l'axe $O't'$ (Ot') nous donne l'événement qui survient à l'origine après une durée de $t' = 1'$ m.

$$\mathcal{B} : (t', x') = (1' \text{ m}, 0 \text{ m})$$

L'étalonnage se fait comme suit : Selon S , l'événement \mathcal{B} se situe à

$$\mathcal{B} : (t, x) = (l \cos \alpha, l \sin \alpha)$$

où l est la distance $O\mathcal{B}$ dans S . Mais

$$\begin{aligned} 1 &= t^2 - x^2 \\ &= (l \cos \alpha)^2 - (l \sin \alpha)^2 \\ &= l^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

Alors puisque $\tan \alpha = V$ et utilisant

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2}} \\ \sin \alpha &= \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{V}{\sqrt{1 + V^2}} \end{aligned}$$

on peut réécrire

$$1 = l \left(\frac{1}{1 + V^2} - \frac{V^2}{1 + V^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

d'où on tire

$$l = \sqrt{\frac{1 + V^2}{1 - V^2}}$$

La longueur de $O\mathcal{B}$ sera $l = 1'$ m dans S' mais elle correspond à une longueur $\sqrt{\frac{1+V^2}{1-V^2}}$ m dans le diagramme espace-temps. Donc l'échelle de S' peut se définir, par exemple sur un papier quadrillé comme

$$S : 1 \text{ cm} : 1 \text{ m}$$

$$S' : 1 \text{ cm} : \sqrt{\frac{1 - V^2}{1 + V^2}} \text{ m}$$

Si on fait la projection du dernier événement (soit \mathcal{B}) sur l'axe Ot (soit \mathcal{A}), on remarque que la distance $O\mathcal{A}$ est supérieure à 1, ce qui signifie que les durées qui s'écoulent sur les horloges de S' sont plus longues lorsque mesurées dans S . De la même façon, si on fait la projection de l'événement \mathcal{A} sur l'axe Ot' , on remarque que la distance $O\mathcal{A}$ est inférieure à $1'm$, ce qui signifie que les durées qui s'écoulent sur les horloges de S sont plus courtes lorsque mesurées dans S' ou inversement que les durées qui s'écoulent sur les horloges de S' sont plus longues lorsque mesurées dans S . C'est ce qu'on appelle la dilatation du temps ou encore le ralentissement des horloges. Ce phénomène, prévu par la relativité restreinte, a été observé avec grande précision.



2.7 Exercices

2.7.1 Principes de la relativité restreinte

2.1 Diagrammes espace-temps

Un repère S' se déplace à une vitesse 0.8 par rapport au repère S . Deux événements se produisent : l'événement 1 à $x_1 = 10\text{ m}$, $t_1 = 60\text{ m}$ et l'événement 2 à $x_2 = 50\text{ m}$, $t_2 = 90\text{ m}$.

- Construisez deux diagrammes espace-temps illustrant ce cas, l'un montrant le point de vue de S (axes t et x orthogonaux) et l'autre le point de vue de S' (axes t' et x' orthogonaux).
- L'un des deux événements décrits peut-il influencer l'autre et, si oui, lequel ?

2.2 Simultanéité

Un événement A a lieu à l'origine du repère S à $t = 0$. Un autre événement B , séparé du premier par une distance de $2.5 \times 10^9\text{ m}$ a lieu 10 secondes plus tard. Trouvez la vitesse de S' par rapport à S pour laquelle les événements A et B :

- ont lieu au même point ?
- ont lieu simultanément ?
- Dans le cas (a), quel est le délai t' entre A et B ?

2.3 Classification des événements

De quel genre (temps, lumière ou espace) sont les événements ci-dessous ? (Les unités sont telles que la vitesse de la lumière $c = 1$.)

- $(0, 0, 0, 0)$ et $(-1, 1, 0, 0)$
- $(1, 1, -1, 0)$ et $(-1, 1, 0, 2)$
- $(-1, 1, -1, 1)$ et $(4, 1, -1, 6)$

2.4 Le vaisseau Enterprise

Le vaisseau *Enterprise* quitte la planète Terre (événement A) à destination de la planète Vulcain et y arrive (événement B) 10^7 s plus tard, tel que mesuré par les horloges de l'*Enterprise*. Dès l'arrivée du vaisseau, le capitaine Picard se fait téléporter sur la planète et le vaisseau retourne immédiatement vers la Terre (considérez que l'opération de téléportage demande un temps négligeable). Picard laisse passer un délai T (tel que mesuré par lui), après quoi il envoie (événement C) un signal lumineux vers la Terre. Le signal atteint éventuellement la Terre (événement D) au moment même où l'*Enterprise* y arrive. L'*Enterprise* se déplace à 99% de la vitesse de la lumière. Supposez que les planètes Terre et Vulcain sont au repos l'une par rapport à l'autre.

- Sur un diagramme espace-temps correspondant au repère de la Terre (axes t et x orthogonaux), identifiez les différents événements ainsi que les différentes lignes d'univers et le parcours du signal lumineux.
- Quelles horloges mesurent le temps propre entre A et B ? Entre B et C ? Entre A et D ?
- Combien de temps a duré le voyage total de l'*Enterprise* tel que mesuré par un observateur terrien ?
- Quelle est l'amplitude du délai T , tel que mesuré par le capitaine Picard ?

2.5 Principes de base

- Un vaisseau extraterrestre se dirige vers la Terre à une vitesse v en émettant un signal radio. À quelle vitesse arrive le signal sur notre planète ? Quelle est la vitesse du signal détecté par des astronautes à bord d'une fusée en direction du vaisseau ? Si les extraterrestres atteignent une vitesse $v \rightarrow c$, ces observations demeurent-elles les mêmes ?
- Une façon de mesurer la longueur l d'une tige, se déplaçant en ligne droite à une vitesse V , consiste à mesurer le temps T que prend la tige pour passer devant un point x au repos dans le repère S . Obtient-on le même résultat si deux observateurs dans S mesurent en même temps la position des extrémités de la tige ?

2.6 $c = 1$

En transformant $c = 3 \times 10^8\text{ m/s}$ en $c = 1$, convertissez les quantités suivantes :

- Constante de Planck $h = 6.6 \times 10^{-34}\text{ J s}$
- Constante de Boltzmann $k = 1.380 \times 10^{-23}\text{ J/K}$

- (c) L'unité de puissance 1 W
- (d) L'unité d'impulsion 1 kg m/s

2.7 Il manque des c

Les expressions suivantes ont été écrites en considérant $c = 1$. On veut retourner aux relations d'origine dans lesquelles c apparaît explicitement.

- (a) $1 - v^2$
- (b) $\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$
- (c) $v = \frac{gt}{(1+g^2t^2)^{1/2}}$, où g est une accélération

2.8 Synchronisation des horloges au Québec

Un politicien zélé veut faire de notre province un état d'avant-garde orienté vers la science et la technologie. Son conseiller (qui a déjà suivi le cours de relativité restreinte) lui met en tête qu'il serait pertinent de synchroniser les horloges québécoises selon les préceptes d'Einstein et de faire du Québec un véritable référentiel inertiel. Ils décident que la capitale sera l'origine du référentiel et que c'est de cette ville que partira le signal lumineux qui déclenchera les horloges québécoises à 0h du premier jour de l'an 2000. Chaque municipalité doit arrêter ses horloges avant cette date et les placer à l'heure nécessaire pour qu'à 0h (heure de Québec) toutes les horloges indiquent la même heure.

- (a) À quelle heure doit-on placer les horloges de Kujjuaq (51 E, 1350 N), Gaspé (496 E, 291 N) et Gatineau (342 O, 188 S) ? (Les coordonnées sont exprimées en km par rapport à Québec)
- (b) À l'aide d'une lunette d'observation d'une puissance exceptionnelle, notre politicien observe l'heure des villes après la synchronisation. Il remarque, à son grand désarroi, que l'heure des autres horloges n'est pas la même que la sienne ? Que doit lui répondre son conseiller de génie pour lui expliquer ce phénomène ?

2.9 Simultanés ou non ?

- (a) Deux événements situés au même endroit et au même instant seront-ils simultanés pour tous les repères ?
- (b) Les calculs d'un astronome lui permette d'affirmer que deux étoiles ont explosé simultanément par rapport à la Terre. Un autre astronome, émigré dans une autre galaxie qui se déplace à grande vitesse par rapport à la nôtre, voit aussi ces explosions. Sont-elles simultanées pour lui aussi ?
- (c) Un monolithe apparaît à 5al de la Terre². Après 2 ans, un autre prend place à 3al de la Terre. Ces événements sont-ils simultanés par rapport au référentiel de la Terre ? Un télescope terrestre détecte-il simultanément l'apparition des monolithes ?
- (d) Notre politicien mentionné ci-dessus observe simultanément, toujours avec ses super lunettes, des pannes de courant (« black-out ») dans deux villes ? Fasciné, il contacte quelques amis vivant ailleurs au Québec (système inertiel) pour savoir s'ils ont observé les pannes simultanément. Que répondent ses amis ? Peut-il recevoir une réponse affirmative venant d'ailleurs dans notre système inertiel ?

2.10 Une expérience dans l'espace temps

- (a) Illustrez l'expérience qui suit dans un diagramme de Minkowski. Les observations sont faites par un expérimentateur dans S . Deux paquets de particules sont émis à la vitesse $v = 0.5$ en $x = 0$ à l'instant $t = -2\text{m}$. L'un des paquets part en direction de la branche négative des x et l'autre selon la branche positive. Deux détecteurs-émetteurs, A en $x = -2\text{m}$ et B en $x = +2\text{m}$, reçoivent leur paquet respectif et les réémettent, après un délai de 0.5m , en direction de l'origine et à une vitesse de 0.75 .
- (b) Le retour des paquets à l'origine ne constitue qu'un seul événement. L'observateur, sachant que les détecteurs se trouvaient à la même distance par rapport à l'origine, conclut que les paquets ont été émis simultanément par A et B . Est-ce une conclusion valable et pourquoi ?
- (c) Un autre expérimentateur se déplace à vitesse $-V$ par rapport à S ($V > 0$ dans le repère S). Illustrez l'expérience dans l'espace temps de l'observateur en

²1 al = 1 année-lumière

mouvement (S'). Trouve-t-il des événements simultanés ? Quel détecteur-émetteur dans S' émet les particules en premier ? (Comme d'habitude, les origines des deux repères se chevauchent en $t = t' = 0$.)

2.11 Causalité

Deux événements se produisent dans S : E_0 à $x_0 = 0$ m et à $t_0 = 0$ m et E_1 à $x_1 = 2$ m et à $t_1 = 1.2$ m.

- Peut-il y avoir une relation de cause à effet entre ces deux événements ?
- Quelle serait, par rapport au repère S , la vitesse d'un repère dans lequel ces deux événements seraient simultanés ?
- Quelle durée sépare ces deux événements pour un observateur se déplaçant à une vitesse $V = 0.8$ par rapport à S ?

Que devient la situation si E_0 est à $x_0 = 0$ m et à $t_0 = 0$ m et E_1 à $x_1 = 1$ m et à $t_1 = 1.2$ m ? Analysez ces situations d'un point de vue géométrique.

2.12 Construction d'un diagramme de Minkowski détaillé

Dessinez les axes x et t d'un repère S et tracez ensuite

- la ligne d'univers de l'horloge de S placée à $x = 1$ m
- la ligne d'univers d'une particule qui se déplace avec la vitesse $v = 0.1$ et qui passe par $x = 0.5$ m à $t = 0$ m
- le lieu des points dont l'intervalle à partir de l'origine est $\Delta s^2 = -1$ m²
- le lieu des points dont l'intervalle à partir de l'origine est $\Delta s^2 = +1$ m²
- le lieu des points dont l'intervalle à partir de l'origine est $\Delta s^2 = 0$
- les axes t' et x' d'un repère S' qui se déplace à $v = 0.5$ dans le sens positif de l'axe des x et dont l'origine coïncide avec celle du repère S
- l'étalonnage des axes t' et x'
- le lieu des événements qui se produisent simultanément à l'instant $t = 2$ m
- le lieu des événements qui se produisent simultanément à l'instant $t' = 2$ m
- la ligne d'univers d'un photon émis à $t = -1$ m et à $x = 0$ m, dans la direction négative de l'axe des x sachant que ce photon est réfléchi par un miroir dont la position est, dans l'autre repère, $x' = -1$ m, et qu'il est ensuite absorbé par un détecteur placé à $x = 0.75$ m

2.13 Référentiels

Trouvez dans le référentiel O' le temps où se produit un événement qui arrive dans O pour $x = 90$ m, $y = 65$ m, $z = 33$ m et $t = 25$ m. L'événement se produit à 125 m du centre de O' . La vitesse entre les O et O' est de 0.7 selon l'axe des x .

2.14 Intervalles

Trouvez le genre et la valeur de l'intervalle pour des événements se produisant à des endroits séparés de :

- 10 m avec un décalage de 5 s
- 5×10^8 m avec un décalage de 1.5 s
- 7.5×10^8 m avec un décalage de 2.5 s

2.15 Ampoules

On pose deux ampoules, une bleue et une rouge séparées de 30.4 km. On les allume de manière à ce que quelqu'un situé entre les deux les voit s'allumer en même temps. Si une autre personne qui se déplace dans l'axe des lumières bleu-rouge à une vitesse de $0.247c$, quel est le délai séparant l'allumage des deux lumières observe-t-il ?

2.16 Événements

Un événement se produit à $(0, 3, 2, 3)$. Un deuxième arrive à $(4, 1, 0, 2)$.

- De quel genre est l'intervalle ?
- Pour avoir un intervalle de genre lumière, quelle distance devrait séparer les deux événements ?

2.17 Événements

Soit trois événements qui ont les coordonnées $\mathcal{E}_1 = (3, 8, 1, 0)$, $\mathcal{E}_2 = (7, 7, 3, 2)$ et $\mathcal{E}_3 = (5, 7, 3, 2)$ pour un observateur situé à l'origine d'un repère S . (a) Trouvez la vitesse que devrait avoir un deuxième observateur dans S' s'il voulait voir se produire en même temps les deux événements $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$. (b) Trouvez la distance entre les événements $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3)$ qui sont simultanés pour un observateur dans un repère S'' .

2.18 Diagrammes de Minkowski

Un observateur au repos voit clignoter une source lumineuse située à une distance k . La source s'allume à toutes les T secondes et reste allumée pour un temps négligeable.

- (a) Tracez le diagramme de Minkowski pour une série de clignotement.
- (b) Trouvez une expression pour le laps de temps écoulé entre la captation de deux clignotements par un appareil situé à l'origine d'un référentiel se déplaçant à la vitesse v par rapport à l'observateur au repos. (suggestion : utilisez la loi des sinus)

2.19 Causalité

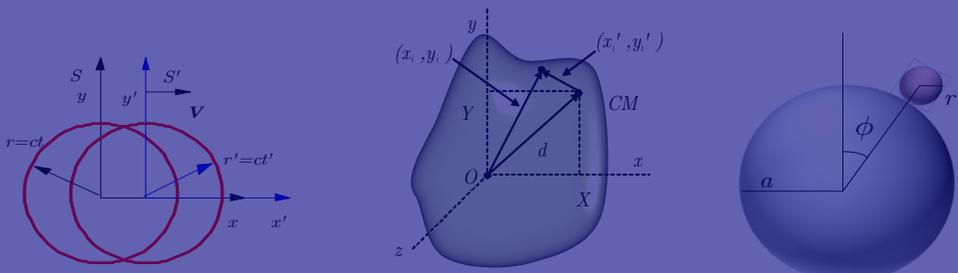
Parmi les événements suivant, trouvez les paires qui peuvent être causalement reliées. (Suggestion : utiliser un diagramme de Minkowski) $\mathcal{E}_1 \equiv (t_1, x_1) : (5, 5)$, $\mathcal{E}_2 : (-8, -5)$, $\mathcal{E}_3 : (-4, -4)$, $\mathcal{E}_4 : (6, 10)$, $\mathcal{E}_5 : (10, 6)$, $\mathcal{E}_6 : (-15, 0)$, $\mathcal{E}_7 : (-12, 9)$

2.20 Détecteurs

Un détecteur est au centre d'une pièce. Au même moment, on allume le détecteur et on démarre un événement au point $p = (10, 70, 30)$ (coordonnées spatiales en m). On remarque la détection de l'événement après un temps de 80 m. La machine prend un temps de 3.2m pour analyser l'événement avant de le signaler. Quelle sorte de d'objet l'appareil détecte-t-il ?



Transformations de Lorentz



Chapitre 3

- 3.1 Transformations de Lorentz . . . 31
- 3.2 Addition de vitesses 36
- 3.3 Exemples d'addition de vitesses 37
- 3.4 Contraction de l'espace et longueur propre 38
- 3.5 Dilatation du temps et temps propre 41
- 3.6 Effet Doppler : cas relativiste . 45
- 3.7 Horloges accélérées 47
- 3.8 Formalisme quadridimensionnel 48
- 3.9 Exercices 55

NOUS INTRODUISONS ici les transformations de Lorentz, un outil qui permet de passer d'un repère inertiel à un autre en évaluant les positions et vitesses des objets dans un repère inertiel à partir des mesures de positions et de vitesses de ces mêmes objets effectuées par un observateur se situant dans un autre repère inertiel.

3.1 Transformations de Lorentz

Rappelons les deux postulats de la relativité restreinte :

Postulat 3.1
Le principe de relativité : les lois de la physique doivent avoir la même forme dans tous les repères inertiels.

Postulat 3.2
Universalité de la vitesse de la lumière : la vitesse de la lumière est la même dans tous les repères inertiels. Cette vitesse ne dépend pas de l'état de mouvement de la source.

Toutes les conséquences de la théorie de la relativité restreinte découlent de cette seule nouvelle hypothèse.

Dans certains cas nous aurons recours à une troisième donnée (que nous appellerons le 3^e postulat ici par abus de langage) lorsque le cas le justifie, c'est-à-dire lorsqu'il y a invariance de translation et de rotation :

Postulat 3.3
L'espace physique est homogène et isotrope

(Cette condition implique l'invariance du système sous une translation et une rotation, c'est-à-dire la conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique)

Mais la transformation de Galilée doit être corrigée. L'invariance de la vitesse signifie notamment qu'un front d'onde émanant d'une source lumineuse ponctuelle demeure sphérique

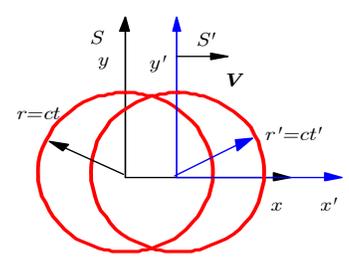


Figure 3.1 ▲ Front d'onde dans deux référentiels S et S' .

dans tous les repères en mouvement relatif uniforme (voir figure 3.1). Il est impossible de déterminer l'état du mouvement de la source par la forme du front d'onde.

Nous voulons trouver une nouvelle transformation des coordonnées à partir de cette géométrie imposée par l'invariance de c .

Soit des repères S et S' en mouvement relatif uniforme. Un front d'onde émis en $t = 0$, par une source fixe à l'origine de S , sera décrit en $t > 0$ par un observateur du même repère par la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2. \tag{3.1}$$

Un observateur d'un repère S' , qui coïncidait avec S à $t = 0$ mais qui se déplace uniformément par rapport à S , verra la sphère

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = t'^2. \tag{3.2}$$

Alors

$$\overbrace{x^2 + y^2 + z^2 = t^2}^{\text{dans } S} \iff \overbrace{x'^2 + y'^2 + z'^2 = t'^2}^{\text{dans } S'} \tag{3.3}$$

Si la vitesse de S' par rapport à S est $\mathbf{V} = V \mathbf{e}_x$, la transformation de Galilée

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{3.4}$$

transforme la sphère de S' en

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = t'^2 \tag{3.5}$$

$$\Downarrow \tag{3.6}$$

$$(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = t^2 \tag{3.7}$$

$$\Downarrow \tag{3.8}$$

$$\underbrace{x^2 - 2xVt + V^2t^2}_{\text{termes en trop}} + y^2 + z^2 = t^2 \tag{3.9}$$

Un résultat qui ne reproduit pas la sphère de S ! La transformation de Galilée n'est pas compatible avec l'invariance de c , mais ce résultat peut nous aider à en trouver une relation qui

1. se réduit à celle de Galilée pour $V \rightarrow 0$,
2. transforme $x'^2 + y'^2 + z'^2 = t'^2$ en $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$.

On observe par ailleurs :

1. qu'on devrait avoir $y' = y, z' = z$, puisque $\mathbf{V} = V \mathbf{e}_x$,
2. que les sphères se dilatent à taux constant, alors x' et t' doivent dépendre linéairement de x et t ,
3. qu'on ne peut avoir $t' = t$ si l'on veut faire disparaître les termes $-2xVt + V^2t^2$ obtenus plus haut.

Essayons la transformation

$$\begin{aligned} t' &= a(t + fx) \\ x' &= b(x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Alors, $x'^2 + y'^2 + z'^2 = t'^2$ devient :

$$\begin{aligned}
 x'^2 + y'^2 + z'^2 &= t'^2 \\
 \Downarrow \\
 b^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 &= a^2(t + fx)^2 \\
 \Downarrow \\
 (b^2x^2 - 2b^2Vxt + b^2V^2t^2) + y^2 + z^2 &= a^2(t^2 + 2fxt + f^2x^2). \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

Les termes linéaires en x (soulignés ici) s'annulent si $f = -Vb^2/a^2$ et il reste

$$b^2(1 - V^2 \frac{b^2}{a^2})x^2 + y^2 + z^2 = a^2(1 - V^2 \frac{b^2}{a^2})t^2. \quad (3.12)$$

Cette dernière équation correspond à une onde sphérique dans S si

$$b^2(1 - V^2 \frac{b^2}{a^2}) = a^2(1 - V^2 \frac{b^2}{a^2}) = 1$$

ou

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}}$$

alors on vérifie

$$\begin{aligned}
 b^2x^2(1 - V^2 \frac{b^2}{a^2}) + y^2 + z^2 &= a^2t^2(1 - V^2 \frac{b^2}{a^2}) \\
 \Downarrow \\
 x^2 + y^2 + z^2 &= t^2.
 \end{aligned}$$

Donc $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ découle de $x'^2 + y'^2 + z'^2 = t'^2$ si nous avons les relations suivantes :
Les transformations de Lorentz

$$\begin{aligned}
 t' &= \frac{t - Vx}{\sqrt{1 - V^2}} \\
 x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \\
 y' &= y \\
 z' &= z.
 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pour $V \rightarrow 0$ cette transformation se réduit à celle de Galilée. En effet Considérons la limite $V/c \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 t' &= \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \xrightarrow{V/c \rightarrow 0} \left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} + \dots\right) \xrightarrow{V/c \rightarrow 0} t \\
 x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \xrightarrow{V/c \rightarrow 0} (x - Vt) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} + \dots\right) \xrightarrow{V/c \rightarrow 0} (x - Vt) \\
 y' &= y \\
 z' &= z.
 \end{aligned}$$

Si S' s'approche plutôt que de s'éloigner on remplace V par $-V$.

La propagation de la lumière, onde électromagnétique, est une conséquence des équations (de Maxwell) de la théorie électromagnétique. L'invariance de la vitesse de la lumière doit donc jouer un rôle fondamental dans cette théorie. En fait, Einstein avait noté l'incompatibilité des équations de Maxwell et des transformations de Galilée.

Souvent on voit ces résultats exprimés en terme de $\beta \equiv \frac{V}{c} = V$ et de $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - V^2)^{-\frac{1}{2}}$ on a

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - Vx) \\ x' &= \gamma(x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{3.14}$$

La transformation inverse, c'est-à-dire (t, x, y, z) en fonction de (t', x', y', z') , s'obtient en changeant le signe de V .

Remarque 3.1

i En langage matriciel, on écrit

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V & 0 & 0 \\ -\gamma V & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Cette matrice est analogue à une *matrice de rotation* d'angle α dans le plan (x, t) avec α tel que $\sinh \alpha = \gamma V$ et $\cosh \alpha = \gamma$. Rappelons que

$$\begin{aligned} \sinh \alpha &= -i \sin i\alpha \\ \cosh \alpha &= \cos i\alpha \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 1 &= \cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha \\ &= \gamma^2 - \gamma^2 V^2 = \gamma^2 (1 - V^2) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \right)^2 (1 - V^2). \end{aligned}$$

En comparaison une rotation d'un angle α dans le plan (t, x) s'écrit

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix},$$

alors qu'on représente une rotation d'un angle $i\alpha$ dans le plan (t, x)

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & -\sinh \alpha \\ -\sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}.$$



Exemple 3.1

◆ Une particule passe du point 1 $(t, x, y, z) = (1, 1, 1, 1)$ au point 2 $(t, x, y, z) = (3, 2, 1, 1)$ dans le repère S .

(a) Calculez ses coordonnées dans le repère S' si S' se déplace avec une vitesse $V = 0.8$ dans la direction des x par rapport à S .

Dans ce cas, $\gamma = \frac{5}{3}$ et les transformations de Lorentz de l'équation (3.14) donnent pour

le point 1, $(t, x, y, z) = (1, 1, 1, 1)$,

$$\begin{aligned}(t', x', y', z') &= (\gamma(t - Vx), \gamma(x - Vt), y, z) \\ &= \left(\frac{5}{3}(t - \frac{4}{5}x), \frac{5}{3}(x - \frac{4}{5}t), y, z\right) \\ &= \left(\frac{5}{3}(1 - \frac{4}{5}), \frac{5}{3}(1 - \frac{4}{5}), 1, 1\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 1\right)\end{aligned}$$

et pour le point 2, $(t, x, y, z) = (3, 2, 1, 1)$

$$\begin{aligned}(t', x', y', z') &= (\gamma(t - Vx), \gamma(x - Vt), y, z) \\ &= \left(\frac{5}{3}(t - \frac{4}{5}x), \frac{5}{3}(x - \frac{4}{5}t), y, z\right) \\ &= \left(\frac{5}{3}(3 - \frac{4}{5} \cdot 2), \frac{5}{3}(2 - \frac{4}{5} \cdot 3), 1, 1\right) \\ &= \left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 1\right)\end{aligned}$$

(b) Calculez l'intervalle entre les deux points dans les deux repères. $((1, 1, 1, 1)$ et $(3, 2, 1, 1)$ dans S et $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 1)$ et $(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 1)$ dans S')

L'intervalle est donné par

$$\begin{aligned}(\Delta s)^2 &= (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= (3 - 1)^2 - (2 - 1)^2 - (1 - 1)^2 - (1 - 1)^2 = 3 \\ (\Delta s')^2 &= (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \\ &= \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 - (1 - 1)^2 - (1 - 1)^2 = 3\end{aligned}$$



Transformation de Lorentz : cas général

Si la vitesse relative entre S et S' est dans une direction arbitraire désignée par le vecteur unitaire \mathbf{e}_n

$$\mathbf{V} = V\mathbf{e}_n$$

les transformations de Lorentz prennent la forme générale pour la position d'espace-temps \mathbf{r} et t

$$\begin{aligned}t' &= \gamma(t - V\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{r}) \\ &= t \cosh \alpha - \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{r} \sinh \alpha \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + (\gamma - 1)(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_n - \gamma V t \mathbf{e}_n \\ &= \mathbf{r} + \mathbf{e}_n(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{r}(\cosh \alpha - 1) - t \sinh \alpha)\end{aligned}\quad (3.16)$$

où $\tanh \alpha = V$, $\cosh \alpha = \gamma$, $\sinh \alpha = \gamma V$ sont les tangentes, cosinus et sinus hyperboliques de α respectivement. On retrouve les expressions précédentes en posant

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (x, y, z) \\ \mathbf{e}_n &= \mathbf{e}_x = (1, 0, 0)\end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned}t' &= \gamma(t - V\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{r}) \\ &= \gamma(t - V(1, 0, 0) \cdot (x, y, z)) \\ &= \gamma(t - Vx)\end{aligned}$$

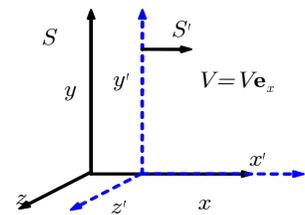


Figure 3.2 ▲ Addition de vitesse ou observation de vitesse dans des référentiels S et S' .

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + (\gamma - 1)(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_n - \gamma V t \mathbf{e}_n \\ (x', y', z') &= (x, y, z) + (\gamma - 1)((1, 0, 0) \cdot (x, y, z))(1, 0, 0) - \gamma V t (1, 0, 0) \\ &= (\gamma(x - Vt), y, z) \end{aligned}$$

3.2 Addition de vitesses

Force est donnée de constater que les transformations de Galilée qui décrivent la combinaison de vecteurs de vitesse,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{V}t & t' &= t \\ \Downarrow \\ \mathbf{v}' &= \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{V} \\ &= \mathbf{v} - \mathbf{V} \end{aligned}$$

ne conviennent plus. Il faut donc trouver une règle de combinaison qui est compatible avec les transformations de Lorentz.

On veut relier les vitesses \mathbf{v} et \mathbf{v}' d'une particule telles qu'observées dans S et S' si S' se déplace à vitesse uniforme $\mathbf{V} = V \mathbf{e}_x$ par rapport à S (voir figure 3.2).

Connaissant la relation entre x, t et x', t' , il est possible d'en déduire la relation entre les vitesses. On a

$$x = \gamma(x' + Vt') \tag{3.17}$$

$$t = \gamma(t' + Vx'). \tag{3.18}$$

Alors un élément de distance dx dans S s'exprime en terme d'éléments de distance dx', dy', dz' et de temps dt' comme suit

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x'} dx' + \frac{\partial x}{\partial y'} dy' + \frac{\partial x}{\partial z'} dz' + \frac{\partial x}{\partial t'} dt' \tag{3.19}$$

$$= \gamma dx' + \gamma V dt'. \tag{3.20}$$

De la même façon, un élément de temps dt dans S s'exprime en terme d'éléments de distance dx', dy', dz' et de temps dt' comme suit

$$dt = \frac{\partial t}{\partial t'} dt' + \frac{\partial t}{\partial x'} dx' + \frac{\partial t}{\partial y'} dy' + \frac{\partial t}{\partial z'} dz' \tag{3.21}$$

$$= \gamma dt' + \gamma V dx'. \tag{3.22}$$

La vitesse étant quotient de ces deux éléments, c'est-à-dire le taux de variation de x

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma dx' + \gamma V dt'}{\gamma dt' + \gamma V dx'} \\ &= \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + V \frac{dx'}{dt'}} = \frac{v'_x + V}{1 + V v'_x}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Dans les autres directions $dy = dy'$ et $dz = dz'$ donc

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma dt' + \gamma V dx'} \\ &= \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma(1 + V \frac{dx'}{dt'})} = \frac{v'_y}{\gamma(1 + V v'_x)}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Résumons, pour $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V} \\v_y &= \frac{v'_y}{\gamma(1 + v'_x V)} \\v_z &= \frac{v'_z}{\gamma(1 + v'_x V)}.\end{aligned}\quad (3.25)$$

C'est la règle de transformation de la vitesse qui s'impose suite à notre hypothèse d'invariance de c et de la transformation de Lorentz qui en découle. Dans la limite où $\mathbf{v}, V \rightarrow 0$ (ou $\mathbf{v}, V \ll 1$), on retrouve la transformation de vitesse de Galilée : $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$

$$\begin{aligned}\lim_{V \rightarrow 0} v_x &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V} = v'_x + V \\ \lim_{V \rightarrow 0} v_y &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{v'_y}{\gamma(1 + v'_x V)} = v'_y \\ \lim_{V \rightarrow 0} v_z &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{v'_z}{\gamma(1 + v'_x V)} = v'_z.\end{aligned}$$

La transformation inverse s'écrit en échangeant $\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{v}'$ et $V \rightarrow -V$ puisque S se déplace à une vitesse $\mathbf{V} = -V\mathbf{e}_x$ par rapport à S'

$$\begin{aligned}v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - v_x V} \\v'_y &= \frac{v_y}{\gamma(1 - v_x V)} \\v'_z &= \frac{v_z}{\gamma(1 - v_x V)}.\end{aligned}\quad (3.26)$$

3.3 Exemples d'addition de vitesses

Exemple 3.2

⚡ Si la particule est un photon dont la vitesse dans S' est

$$v'_x = c = 1, \quad v'_y = v'_z = 0. \quad (3.27)$$

Sa vitesse dans S est

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + V v'_x} = \frac{1 + V}{1 + V} = 1, \quad v_y = v_z = 0. \quad (3.28)$$

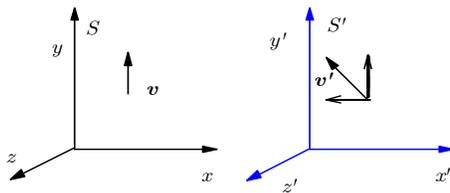


Figure 3.3 ◀▶

Vitesse dans la direction des y , avec mouvement relatif dans la directions des x .



Exemple 3.3

✦ Pour un photon dont la vitesse dans S serait dans la direction des y c'est-à-dire $v_y = c$ (voir figure 3.3) :

$$v_x = 0, \quad v_y = c, \quad v_z = 0. \quad (3.29)$$

On obtient dans S' :

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - v_x V} = -V \\ v'_y &= \frac{v_y}{\gamma(1 - v_x V)} = \frac{v_y}{\gamma(1 - 0)} = (1 - V^2)^{\frac{1}{2}} \\ v'_z &= \frac{v_z}{\gamma(1 - v_x V)} = 0 \end{aligned}$$

et on vérifie

$$\begin{aligned} v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z &= c^2 \\ V^2 + (1 - V^2) + 0 &= 1. \end{aligned}$$



Exemple 3.4

✦ Soit deux particules de vitesse égale et opposée dans S' :

$$v'_{x1} = 0.9, \quad v'_{x2} = -0.9. \quad (3.30)$$

Calculer la vitesse de la première dans le repère où la seconde est au repos. Identifions S au repère de la deuxième particule,

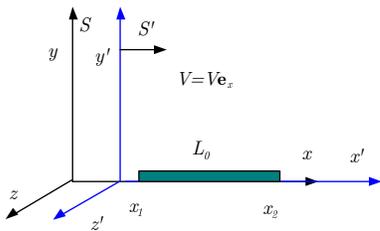
$$\mathbf{V} = 0.9\mathbf{e}_x = -v'_{x2}\mathbf{e}_x.$$

Alors

$$v_{x1} = \frac{v'_{x1} + V}{1 + v'_{x1} V} = \frac{(0.9 + 0.9)}{1 + (0.9)^2} \quad (3.31)$$

$$\simeq 0.9945 < c = 1 ! \quad (3.32)$$

Du repère de la particule 2, la particule 1 s'approche à la vitesse $v_{x1} \simeq 0.9945 < c$. Dans la relativité de Galilée, cette vitesse aurait été $v_{x1} = 1.8 > c$.



3.4 Contraction de l'espace et longueur propre

Soit $L_0 \equiv x_2 - x_1$, la longueur d'une tige au repos dans S (aussi appelée *longueur propre*). On mesure la longueur de cette tige dans S' , en mouvement uniforme à vitesse $\mathbf{V} = V \mathbf{e}_x$ par rapport à S , en déterminant simultanément les positions $x'_1(t')$ et $x'_2(t')$ de ses extrémités dans S' (voir figure 3.4). La définition naturelle de sa longueur dans S' est :

$$L' \equiv x'_2(t') - x'_1(t') \quad (3.33)$$

mais $x_2 = \gamma(x'_2(t') + Vt')$ et $x_1 = \gamma(x'_1(t') + Vt')$ et donc

$$L_0 = x_2 - x_1 = \gamma(x'_2(t') - x'_1(t')) = \gamma L' \quad (3.34)$$

ce qui mène à :

$$L' = \frac{1}{\gamma} L_0 = \sqrt{1 - V^2} L_0. \quad (3.35)$$

Figure 3.4 ▲
Contraction des longueurs: On mesure la longueur de cette tige dans S' , en mouvement uniforme à vitesse $\mathbf{V} = V \mathbf{e}_x$, par rapport à S , en déterminant simultanément les positions $x'_1(t')$ et $x'_2(t')$ de ses extrémités

On note que $L' \leq L_0$ donc l'observateur dans S' mesure une longueur plus petite ! C'est la contraction de *Lorentz-Fitzgerald* d'une tige en mouvement longitudinal. Si la tige est placée transversalement à la direction du mouvement relatif on trouve $L' = L_0$ puisque les positions transversales sont les mêmes dans S et S' . (c'est-à-dire. $y = y'$ et $z = z'$).

Il existe une autre façon de définir et de mesurer la longueur de la tige dans S' . Deux rayons lumineux parallèles sont émis simultanément des extrémités de la tige dans S au temps t (voir figure 3.5). Des détecteurs fixes dans S' et de coordonnées x'_1 et x'_2 reçoivent ces rayons. On a en ce cas

$$x'_1 = \gamma(x_1 - Vt) \quad (3.36)$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - Vt) \quad (3.37)$$

et la différence entre les deux positions devient

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) \quad (3.38)$$

ce qui correspond à

$$L^* = \gamma L_0. \quad (3.39)$$

Ce désaccord n'est qu'apparent, il provient de deux définitions distinctes de la longueur dans S' . Les deux expériences sont différentes, la première compare $\Delta x'$ à $\Delta t' = 0$ et la seconde compare la même séparation $\Delta x'$ à $\Delta t = 0$ ce qui entre en conflit avec la définition de la longueur puisque $\Delta t' \neq 0$.

⇒ Deux événements simultanés dans S ne le sont pas dans S'

Pour deux événements simultanés ($\Delta t = 0$) et séparés de Δx dans S on a, dans S' :

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad t' = \gamma(t - Vx) \quad (3.40)$$

et donc si $\Delta t = 0$

$$\Delta x' = \gamma \Delta x \quad (3.41)$$

$$\Delta t' = -\gamma V \Delta x \neq 0. \quad (3.42)$$

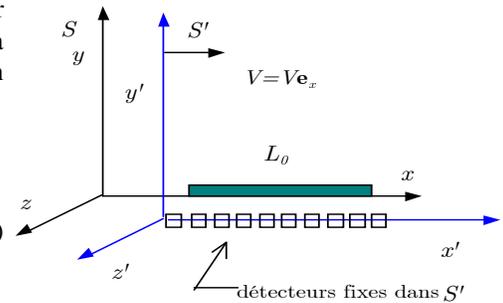


Figure 3.5 ▲

Contraction des longueurs: Deux rayons lumineux parallèles sont émis simultanément des extrémités de la tige dans S au temps t .

Remarque 3.2

ⓘ Attention :

1- Pour calculer la longueur, il faut prendre les mesures simultanément dans le repère où on mesure.

2- La contraction des longueurs (ou de Lorentz)

$$L_0 = \gamma L \quad (3.43)$$

ne s'applique que pour des longueurs longitudinales au mouvement entre S et S' calculées à partir de mesures simultanées dans leur repères respectifs.



Remarque 3.3

ⓘ Longueur propre et intervalle :

La longueur propre d'un objet L_0 est la longueur mesurée dans le repère S où l'objet est au repos. Dans ce repère les mesures de positions correspondent à deux événements \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 simultanées et l'intervalle correspond à

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= -(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \end{aligned}$$

donc

$$L_0 = \sqrt{-\Delta s^2}.$$

Mais l'intervalle étant un invariant de Lorentz, on peut trouver la longueur propre en évaluant l'intervalle entre ces mêmes deux événements \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 dans S'

$$L_0 = \sqrt{-\Delta s^2} = \sqrt{-\Delta s'^2}$$

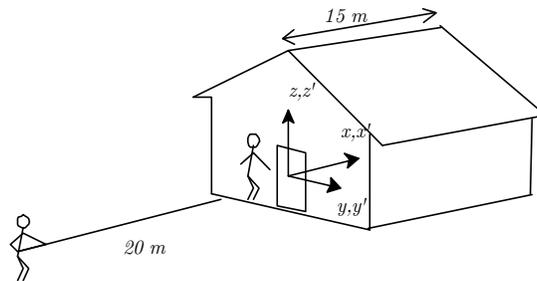
ou dans tout autre repère inertiel. Cependant, seul dans le repère S l'intervalle correspond-il à une distance entre deux points. Par exemple dans S'

$$\sqrt{-\Delta s'^2} = \sqrt{(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2}$$

où en général $(\Delta t')^2 \neq 0$.



Figure 3.6 ◀▶ Schéma de la situation décrite pour le paradoxe de la perche et la grange.



3.4.1 Le paradoxe de la perche et la grange

Un coureur rapide, M. Laperche, portant une perche de 20 m, s'approche d'une grange, à une vitesse de 0.8. Son ami, M. Lagrange, se tient près de la porte ouverte de cette grange, dont la longueur est de 15 m (voir figure 3.6).

Selon M. Lagrange, la longueur de la perche portée par M. Laperche est réduite d'un facteur γ^{-1} . Donc pour M. Lagrange, la perche mesure 12 m et rentre complètement à l'intérieur de la grange lorsque celui-ci ferme la porte.

$$L_g = L_{0g} = 15 \text{ m}$$

$$L_p = \gamma^{-1} L_{0p} = \frac{3}{5} \cdot 20 \text{ m} = 12 \text{ m}.$$

Par contre, dans le repère de M. Laperche, c'est la longueur de la grange qui est réduite d'un facteur $\gamma^{-1} = \frac{3}{5}$ et donc elle mesure 9 m.

$$L'_g = \gamma^{-1} L_{0g} = \frac{3}{5} \cdot 15 \text{ m} = 9 \text{ m}$$

$$L'_p = L_{0p} = 20 \text{ m}.$$

Il en conclut que la perche n'est pas complètement à l'intérieur de la grange lorsque celle-ci touche le fond de la grange.

Physiquement, il ne peut y avoir qu'une seule réalité. En fait, il n'y a pas de paradoxe puisqu'il ne peut y avoir de lien de causalité entre les événements reliant les deux extrémités de la perche, fermeture de la porte au passage de la queue et contact de la tête de la perche avec le mur du fond. Une autre façon de voir la faille dans le raisonnement est d'évoquer que la simultanéité est relative. En effet, les événements qui ont servi à mesurer la grange et la perche ne sont simultanés que dans le repère où la mesure a été effectuée. On vérifie d'ailleurs que, quel que soit le repère, la mesure des longueurs de la perche (ou de la grange) impliquent des événements de genre-espace, c'est-à-dire que $\Delta s^2 > 0$ et que ceux-ci ne sont pas reliés causalement.

Alors, puisqu'il ne peut y avoir qu'une seule réalité, quelle est-elle ? Que la perche soit complètement dans la grange ou non lorsque la porte ferme, ce résultat doit être le même dans tous les référentiels. Les deux observateurs semblent arriver à des conclusions différentes. Qui a raison ? La réponse : la perche entre bel et bien dans la grange au complet. Réexaminons la situation dans le repère de la perche où ce résultat semble poser problème. En arrivant sur la perche, le fond de la grange frappe la tête de la perche et continue en l'entraînant avec elle. Pendant ce temps, la queue de la perche est toujours au repos et ne « sais » pas que la tête a touché le fond de la grange. Supposons que cette information lui est transmise à la vitesse de la lumière c (et non pas instantanément), c'est-à-dire plus vite que la vitesse de $0.8c$ à laquelle la grange se rapproche. Le signal arrive donc avant, au temps $\Delta t_{\text{signal}} = 20 \text{ m}/c$ alors que le fond de la grange arrive au temps $\Delta t_{\text{grange}} = 20 \text{ m}/(0.8c)$. À la réception du signal, on referme la porte et la perche se retrouve dans la grange au complet. (pour plus de détails voir problème 3.7).

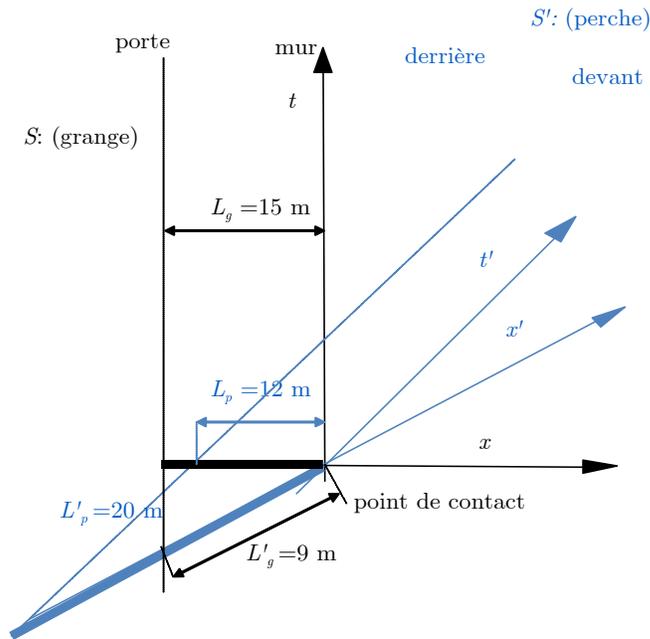


Figure 3.7 ◀▶

Diagramme de Minkowski pour la grange identifiée par le trait noir épais (repère S) et la perche représentée par le trait bleu épais (repère S'). On note que la longueur de la grange et de la perche dans le repère S est respectivement 15 m et 12 m.

3.5 Dilatation du temps et temps propre

On appelle *temps propre* (τ) le temps mesuré dans le système de référence S où l'horloge est au repos. Si l'horloge est à l'origine $x = 0$ de S , alors deux événements correspondant à un délai sur cette horloge ont pour coordonnées d'espace-temps

$$\mathcal{E}_1 : x_1 = 0, \quad t_1 = 0$$

$$\mathcal{E}_2 : x_2 = 0, \quad t_2 = \tau.$$

La transformation de Lorentz prédit un délai

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - V\Delta x) \quad (3.44)$$

$$= \gamma(\tau - V\Delta x) \quad (3.45)$$

$$= \gamma\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1 - V^2}}. \quad (3.46)$$

Donc, $\Delta t' = \gamma\tau$ est dilaté pour l'observateur de S' en mouvement relatif uniforme par rapport à l'horloge.

⇒ Les horloges en mouvement semblent avancer plus lentement que les horloges au repos : elles mesurent des délais dilatés ou allongés : $\Delta t' > \Delta\tau$.

⇒ L'horloge en mouvement à la vitesse de la lumière (en autant que cela soit possible) semblent arrêtée.

Il est à noter que la mesure du délai $\Delta t'$ entre deux temps t'_2 et t'_1 indiqué par une horloge suppose que celle-ci est au repos dans le repère de S . Cependant ces deux événements ne sont pas à la même position dans S'

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\tau) = -\frac{V\tau}{\sqrt{1-V^2}}$$

Exemple 3.5

 Temps de vie des pions^a :

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu, \quad \begin{matrix} m_{\pi^+} \simeq 273m_e \\ m_{\mu^+} \simeq 215m_e \end{matrix} \quad (3.47)$$

Dans un repère de pions au repos ($v_{\pi} = 0$) la durée de vie moyenne des pions est

$$\tau_{\pi} \simeq 2.5 \times 10^{-8} \text{ s} = 7.5 \text{ m} \quad (3.48)$$

Dans un faisceau de pions de vitesse $v_{\pi} = 0.9$, leur vie moyenne est de

$$t' = \frac{2.5 \times 10^{-8} \text{ s}}{\sqrt{1-(0.9)^2}} \simeq 5.7 \times 10^{-8} \text{ s} = 17.2 \text{ m} \quad (3.49)$$

et donc les π^+ ont une vie moyenne environ deux fois plus longue qu'on pourrait le déduire de manière Galiléenne (non relativiste). 

^aVoir dans Phys. Rev. 88, 179 (1952).

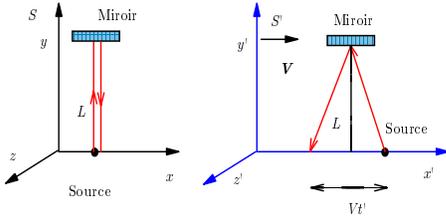


Figure 3.8 ▲ Une impulsion lumineuse réfléchiée par un miroir telle qu'observée dans les référentiels S et S' .

Cette dilatation du temps ne comporte pas de *mystère* autre que celui de l'invariance de la vitesse de la lumière.

Considérons une impulsion lumineuse réfléchiée par un miroir (voir figure 3.8). Si la source et le miroir sont fixes dans S , le temps de parcours est $\tau = \frac{2L}{c} = 2L$. Une horloge fixe dans S' , en mouvement uniforme par rapport à S , mesure, pour la même réflexion, un temps plus grand parce que dans S' la distance à parcourir est plus longue.

Supposons que l'aller-retour dans S' a duré t' , on calcule que la distance parcourue $d = ct'$ est

$$d = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{Vt'}{2}\right)^2} = ct' = t' \quad (3.50)$$

Élevant au carré on récrit :

$$t'^2 = 4L^2 + V^2t'^2 \quad (3.51)$$

d'où on tire facilement

$$t' = \frac{2L}{\sqrt{1-V^2}} = \gamma\tau \quad (3.52)$$

Donc rien de mystérieux dans la construction des horloges !

Remarque 3.4

 Temps propre et intervalle :

Le temps propre τ entre deux événements est temps indiqué par une horloge se trouvant dans le repère S où les deux événements \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont à la même position (ex : objet au repos). Dans ce repère les mesures de temps correspondent à l'intervalle correspond à

$$\Delta s^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = (\Delta t)^2$$

donc

$$\tau = \sqrt{\Delta s^2}$$

Mais l'intervalle étant un invariant de Lorentz, on peut trouver le temps propre en évaluant

l'intervalle entre ces mêmes deux événements \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 dans S'

$$\tau = \sqrt{\Delta s^2} = \sqrt{\Delta s'^2}$$

ou tout autre repère inertiel. Cependant, seul dans S l'intervalle correspond-t-il au délai indiqué par l'horloge. Par exemple dans S'

$$\sqrt{-\Delta s'^2} = \sqrt{(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2}$$

où en général $(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 \neq 0$.



3.5.1 Une vérification expérimentale

En 1971, une vérification expérimentale directe de la dilatation du temps fut effectuée. Deux avions abord desquels avaient été placées de horloge atomique au césium pendant leurs vols commerciaux réguliers (l'un vers l'est, l'autre vers l'ouest) comparèrent leur horloge à une troisième horloge au sol.

L'avion volant vers l'est perdit 59 ns alors que l'avion volant vers l'ouest gagna 273 ns. Deux effets sont présents ici : Les horloges qui bougent ralentissent mais un effet de relativité générale accélère plutôt les horloges. Quoi qu'il en soit on mesura une différence de

$$\Delta = t_E - t_O = (-59) - (+273) = -332 \text{ ns} \pm 15 \text{ ns}$$

entre les deux horloges laquelle est moins sensible à un effet de relativité générale.

Analysons l'expérience en supposant que tous les référentiels considérés sont inertiels. Considérons trois repères inertiels, un situé au pôle nord, un sur terre et un dans l'avion. Les délais, t_N , t_T et t_A respectivement, sont reliés entre eux par

$$\begin{aligned} t_N &= \gamma_T t_T \\ &= \gamma_A t_A \end{aligned}$$

où $\gamma_T = (1 - v_T^2)^{-1/2}$ et $\gamma_A = (1 - v_A^2)^{-1/2}$. Les repères sur terre et dans l'avion ont donc des vitesses relatives de v_T et v_A par rapport au pôle nord. Les temps en avion et sur terre sont donc reliés par

$$t_A = \frac{\gamma_T}{\gamma_A} t_T = t_T \sqrt{\frac{1 - v_A^2}{1 - v_T^2}}$$

Puisque v_T et v_A sont petit par rapport à $c = 1$, on peut écrire

$$t_A \simeq t_T \left(1 + \frac{1}{2} (v_T^2 - v_A^2) + \dots \right)$$

où la différence entre les deux horloges est

$$t_{AT} = t_A - t_T \simeq \frac{t_T}{2} (v_T^2 - v_A^2).$$

Supposons pour simplifier que les deux avions ci-dessus ont des vitesses de croisière constantes par rapport au sol v_C . La vitesse de chaque avion (non relativiste) est donc

$$v_A = v_T \pm v_C$$

suivant qu'il va vers l'est et l'ouest respectivement. Alors

$$\begin{aligned} \Delta &= t_E - t_O \\ &\simeq \frac{t_T}{2} (v_T^2 - (v_T + v_C)^2) - \frac{t_T}{2} (v_T^2 - (v_T - v_C)^2) \\ &\simeq -2t_T v_T v_C = -2t_T \left(\frac{v_T v_C}{c^2} \right) \end{aligned}$$

ce qui est en accord avec le signe du résultat expérimental. Les expérimentateurs ont pu utiliser les vitesses exactes enregistrées par les avions pour leurs calculs. Il est toutefois possible d'estimer Δ en posant une vitesse de croisière v_C

$$v_C = \frac{2\pi r}{t_T}$$

où r est le rayon de l'orbite de l'avion par rapport à l'axe de rotation de la terre (et de l'avion), c'est-à-dire le parcours relativement au repère terrestre. De la même façon, la vitesse du repère sur la terre est de

$$v_T = \frac{2\pi r}{t_{\text{jour}}}$$

où t_{jour} est la période de rotation de la terre. Il s'en suit que

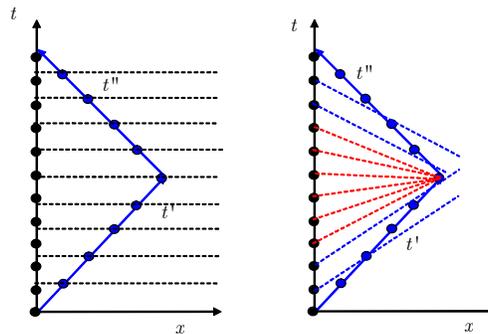
$$\begin{aligned} \Delta &= -2t_T \left(\frac{v_T v_C}{c^2} \right) \\ &= -2 \left(\frac{t_T}{t_{\text{jour}}} \right) \left(\frac{v_C^2}{c^2} \right) t_T. \end{aligned}$$

Le voyage dura environ $t_T = 45$ h. Une vitesse moyenne de $220 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ mène à un résultat très près de la mesure qui fut effectuée. De nos jours, il est facile de vérifier ce résultat avec des satellites. En fait, les systèmes GPS doivent même tenir compte des effets dus à la relativité générale.

3.5.2 Le paradoxe des jumeaux

Figure 3.9 ◀▶

Diagramme de Minkowski des horloges de Pantoufle (S) et de Bougeotte à l'aller (S') et au retour (S''). Les points noirs et bleus indiquent un intervalle d'un an. L'horloge de Bougeotte est au ralenti par rapport à celle de Pantoufle. À gauche: Les lignes noires parallèles à l'axe des x illustrent la simultanéité dans le repère S . Les lignes bleues (rouges pendant le changement de direction) parallèles à l'axe des x' illustrent la simultanéité dans le repère S' .



Le «paradoxe des jumeaux» est une expérience imaginaire évoquée par Einstein pour tester l'interprétation du ralentissement des horloges. Elle met en jeu deux jumeaux, Bougeotte et Pantoufle, et se lit comme suit :

Bougeotte fait un voyage en fusée dont la vitesse est $0.6c$ (60% de la vitesse de la lumière). Son voyage aller-retour dure 10 a selon Pantoufle qui est resté sur Terre. Pourtant, l'horloge que Bougeotte transporte lui indique qu'il n'a vieilli que de 8 a à bord de sa fusée¹. Ceci est prédit par la relativité restreinte qui stipule que selon Pantoufle, il y a ralentissement de l'horloge de Bougeotte parce qu'il se déplace par rapport à la Terre.

Le paradoxe se pose ainsi : Puisque Bougeotte de son côté voit que c'est son son jumeau qui fait l'aller-retour, il en conclut que c'est l'horloge de Pantoufle qui est au ralenti.

En fait, il n'y a pas vraiment paradoxe puisque les deux jumeaux ne vivent pas des situations similaires. Pour revenir, Bougeotte a du changer de repère inertiel ou autrement dit, il a du accélérer. Il voit effectivement que pendant qu'il maintient une vitesse constante l'horloge de Pantoufle est au ralenti mais pendant qu'il accélère l'horloge de son jumeau rattrape et devance même la sienne

L'horloge de Pantoufle est toujours dans un repère inertiel et donc c'est son point de vue qui prévaut. Ce qu'il observe, c'est l'horloge au ralenti de Bougeotte pour l'aller, puis un court changement de référentiel, puis une horloge au ralenti au retour de Bougeotte (figure 3.9 à gauche)

¹ $1 \text{ a} = 1 \text{ an}$.

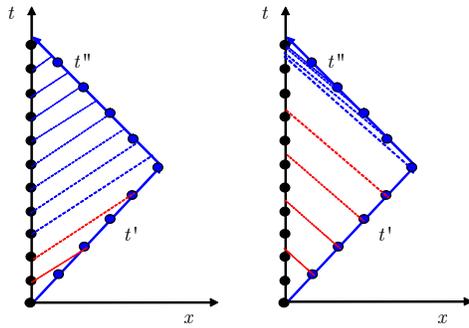


Figure 3.10

À gauche: Les lignes rouges et bleues représentent la trajectoire du signal lumineux (rouge = aller, bleu = retour) émis par S à intervalle régulier et capté par S' . À droite: Le signal est émis par S' et capté par S .

Par ailleurs, pour Bougeotte, l'horloge de Pantoufle est au ralenti pendant l'aller et le retour mais pendant le court changement de référentiel, l'horloge de Pantoufle tourne très vite (traits rouges dans la figure 3.9 à droite), rattrape et même dépasse l'horloge de Bougeotte. Cet effet est dû à l'accélération de Bougeotte.

La figure 3.9 illustre les diagrammes de Minkowski des horloges de Pantoufle (S) et de Bougeotte à l'aller (S') et au retour (S''). Les points noirs (bleus) indiquent un délai de un an dans le repère S (S'). Les lignes pointillés noirs (bleues et rouges) parallèles à l'axe des x (x') représentent la simultanéité dans les S (S') et permettent de mesurer le moment dans le référentiel de S (S') où les horloges changent d'année.

La figure 3.10 illustre comment chacun des observateurs voit à l'aide d'un télescope l'horloge de l'autre. Dans ce cas, un délai supplémentaire est s'ajoute dû à la transmission du signal lumineux.

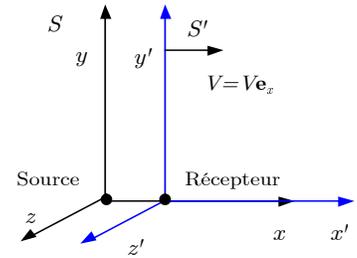


Figure 3.11

Effet Doppler: Des impulsions de lumière sont émises d'une source fixe à l'origine de S par intervalle de temps de τ à $t_1 = 0, t_2 = \tau, \dots$

3.6 Effet Doppler : cas relativiste

Puisque la lumière se propage dans le vide (pas d'éther), nous avons à tenir compte que de la vitesse relative entre la source et le récepteur (pas de vitesse par rapport au milieu).

3.6.1 Cas du mouvement longitudinal

Deux impulsions de lumière sont émises d'une source fixe à l'origine de S en $t_1 = 0$ et en $t_2 = \tau$ (voir figure 3.11). L'émission d'impulsions émises à intervalle de temps régulier (avec une période de τ) correspond aux événements :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 : x_1 = 0, \quad t_1 = 0 \\ \mathcal{E}_2 : x_2 = 0, \quad t_2 = \tau \\ \vdots \\ \mathcal{E}_n : x_n = 0, \quad t_n = n\tau. \end{aligned}$$

Dans S' , de vitesse $\mathbf{V} = V \mathbf{e}_x$ par rapport à S , deux impulsions sont perçues en $x'_1 = 0$ à l'instant $t'_1 = 0$ (si S et S' coïncident en $t = t' = 0$) et en

$$x'_2 = \gamma(x_2 - Vt_2) = -\gamma V \tau \tag{3.53}$$

à l'instant

$$t'_2 = \gamma(t_2 - Vx_2) = \gamma \tau. \tag{3.54}$$

soit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 : x'_1 = 0, \quad t'_1 = 0 \\ \mathcal{E}_2 : x'_2 = -\gamma V \tau, \quad t'_2 = \gamma \tau. \end{aligned}$$

Il s'écoulera toutefois un délai avant que cette seconde impulsion émise en $x'_2 = \gamma(x_2 - Vt_2)$ soit détectée à l'origine $x' = 0$ de S'

$$\Delta t' = \frac{|\Delta x'|}{c} = |x'_2 - x'_1| = V \gamma \tau. \tag{3.55}$$

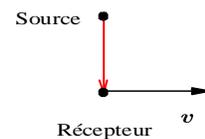


Figure 3.12

Effet Doppler: Pour l'observateur S' , la source s'éloigne transversalement à une vitesse v .

À l'origine de S' , le temps écoulé entre la réception des deux impulsions est

$$\tau' = t'_2 + \Delta t' = \gamma\tau + \gamma V\tau = \frac{1+V}{\sqrt{1-V^2}}\tau = \sqrt{\frac{1+V}{1-V}}\tau. \quad (3.56)$$

Pour l'observateur dans S , les impulsions sont émises avec une fréquence ν

$$\nu = \frac{1}{\tau}$$

où τ est maintenant la période, la fréquence observée par un observateur s'éloignant de la source sera

$$\begin{aligned} \nu'_L &= \frac{1}{\tau'} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+V}{1-V}}\tau} \\ &= \sqrt{\frac{1-V}{1+V}}\nu = \frac{1-V}{\sqrt{1-V^2}}\nu \end{aligned}$$

Si $\beta \ll 1$:

$$\sqrt{\frac{1-V}{1+V}} = (1-V)^{\frac{1}{2}}(1+V)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.57)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}V + \dots\right) \left(1 - \frac{1}{2}V + \dots\right) \quad (3.58)$$

$$\simeq 1 - V + \dots \quad (3.59)$$

En accord avec le cas acoustique non relativiste. Si l'observateur s'approche, plutôt que de s'éloigner, on remplace V par $-V$.

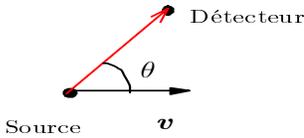


Figure 3.13 ▲ Effet Doppler (cas général)

3.6.2 Cas du mouvement transversal

L'effet Doppler est aussi observable même si le mouvement relatif du récepteur est transversal à la direction du signal provenant de la source (voir figure 3.12). Donc, ici, on parle d'un observateur dans le repère S' qui reçoit le signal transversalement par rapport au mouvement de la source. Puisque les composantes spatiales transversales ne sont pas affectées par le mouvement relatif entre la source et le récepteur, il résulte uniquement de la dilatation du temps :

$$t' = \gamma\tau \quad (3.60)$$

alors

$$\nu'_T = \frac{1}{\gamma}\nu = \sqrt{1-V^2}\nu \quad (3.61)$$

où ν et la fréquence dans le repère de la source.

3.6.3 Cas général

Posons les vecteurs de vitesse $\mathbf{v} = -\mathbf{V}$ de la source (identifiée ici au repère S) et \mathbf{c} de la lumière dans le repère du récepteur S' alors (sans démonstration) :

$$\begin{aligned} \nu'(\theta) &= \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta_{\mathbf{v},\mathbf{c}}}\nu \\ &= \frac{\sqrt{1-V^2}}{1-V \cos \theta_{\mathbf{v},\mathbf{c}}}\nu \end{aligned}$$

où $\theta_{\mathbf{v},\mathbf{c}}$ est l'angle entre les vecteurs de la source et de la lumière, $\mathbf{v} = -\mathbf{V}$ et \mathbf{c} respectivement, dans le repère du récepteur S' .

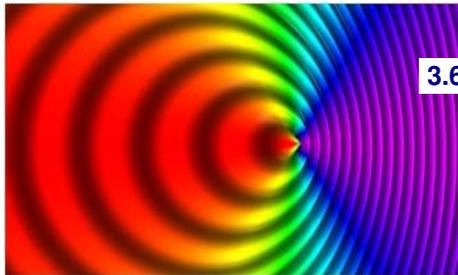


Figure 3.14 ▲ Effet Doppler: La couleur de la lumière (ou la fréquence, ou la longueur d'onde) observée par le détecteur dépend de l'angle entre la vitesse de la source et la direction de la lumière qui a atteint le récepteur.

Pour une observation du signal lumineux à angle $\theta_{v,c}$ par rapport à la direction du mouvement de la source (voir figure 3.13), on aura (vitesse relative de S' par rapport à $S = V = -v$)

$$\begin{aligned} \cos \theta_{v,c} > 0 &\implies \text{rapprochement de la source du récepteur} \\ \cos \theta_{v,c} < 0 &\implies \text{éloignement de la source du récepteur} \end{aligned}$$

$$v'(\theta) = \frac{\sqrt{1-V^2}}{1-V \cos \theta_{v,c}} v, \quad (V > 0 \text{ pour rapprochement}). \quad (3.62)$$

On retrouve les résultats précédents en posant

$$\begin{aligned} \text{cas longitudinal : } \theta_{v,c} &= 0 & v'(\theta) &= \frac{\sqrt{1-V^2}}{1-V} v \\ \text{cas transversal : } \theta_{v,c} &= \frac{\pi}{2} & v'(\theta) &= \sqrt{1-V^2} v \\ \text{cas particulier : } \theta_{v,c} &= \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V} & v'(\theta) &= v \\ & \text{ou } V &= \frac{2 \cos \theta_{v,c}}{1+\cos^2 \theta_{v,c}} \end{aligned}$$

On peut facilement l'angle pour lequel l'effet Doppler est nul, c'est-à-dire $v'(\theta) = v$. Contrairement au cas non relativiste, cet angle n'est pas $\theta_{v,c} = \frac{\pi}{2}$.

On peut visualiser la dépendance angulaire à partir de la figure 3.14. On note que la couleur de la lumière (ou la fréquence, ou la longueur d'onde) observée par le détecteur dépend de l'angle entre la vitesse de la source et la direction de la lumière qui a atteint le récepteur.

3.7 Horloges accélérées

La relativité restreinte ne fait pas de prédiction relative à l'effet dynamique de l'accélération (forces, tensions induites...). Si l'effet dynamique de l'accélération est absent ou n'existe pas, on peut supposer que $t' = \gamma\tau$ s'applique à chaque instant pour une horloge accélérée avec v (dans γ) la vitesse instantanée. Deux conséquences s'ensuivent :

1. Dans un repère non inertiel en mouvement circulaire uniforme : $t' = \gamma\tau$
2. Si v est constant sauf en de brefs instants d'accélération, la relation $t' = \gamma\tau$ sera encore valide.

Exemple 3.6

⚡ Les horloges placées sur la surface de la terre et sur un édifice de 100 m n'indiquent pas les mêmes temps. Par combien diffèrent-elles ?

Négligeant la contribution au ralentissement due au champ gravitationnel (requiert la relativité générale), un effet due à la différence de vitesse tangentielle est calculable.

Par rapport à un observateur au centre de la terre qui tourne avec celle-ci chacun subira un ralentissement proportionnel à γ^{-1} . Donc le ralentissement à la surface de la terre est

$$\frac{1}{\gamma_T} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega R_T}{c}\right)^2} = 1 - 6.39927 \times 10^{-21}$$

où R_T est le rayon terrestre et ω est la fréquence angulaire de la terre ($\omega = 2\pi/\text{jour}$). On reconnaît ωR_T , la vitesse tangentielle. L'horloge perd donc

$$\Delta t_T = 6.39927 \times 10^{-21} \text{ s}$$

sur la seconde du centre de la terre. Par ailleurs, le ralentissement sur l'édifice est

$$\frac{1}{\gamma_E} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega (R_T + 100\text{m})}{c}\right)^2} = 1 - 6.36452 \times 10^{-21}$$

et cette horloge perd donc

$$\Delta t_E = 6.36452 \times 10^{-21} \text{ s}$$

sur la seconde du centre de la terre. Donc, l'horloge de l'édifice est ralentie d'un facteur

$$\frac{\gamma_T}{\gamma_E} \simeq 1 - 6.36452 \times 10^{-21} + 6.39927 \times 10^{-21}$$

et perd donc

$$\begin{aligned} \Delta t_{T,E} &= \Delta t_T - \Delta t_E = 6.39927 \times 10^{-21} \text{ s} - 6.36452 \times 10^{-21} \text{ s} \\ &= 3.475 \times 10^{-23} \text{ s} \end{aligned}$$

par rapport à l'horloge sur terre dans le repère de la Terre (ce qui est tout à fait négligeable). Mentionnons ici qu'une étude plus approfondie impliquant la relativité générale nous aurait mener à considérer des effets supplémentaires dus à la gravitation. 

Exemple 3.7

 Pour $\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$ avec $\tau \simeq 2.2 \times 10^{-6}$ s. On observe le temps de vie dilaté $\gamma\tau$ lorsque les μ^- sont en mouvement circulaire uniforme dans un champ magnétique (accélérateur). 

3.8 Formalisme quadridimensionnel

Rappelons que

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - Vx) \\ x' &= \gamma(x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{3.63}$$

En adoptant la notation avec des indices (0, 1, 2, 3), on a :

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - Vx^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - Vx^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \tag{3.64}$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle ainsi :

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V & 0 & 0 \\ -\gamma V & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{3.65}$$

ou encore

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^\mu x^\nu \tag{3.66}$$

où Λ_ν^μ est appelée matrice de transformation de Lorentz et où x^μ est un quadrivecteur

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}). \tag{3.67}$$

Remarque 3.5

 Souvent on abrège cette notation par la notation d'Einstein

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^\mu x^\nu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \tag{3.68}$$

où la répétition d'indice grec (ex. $\mu, \nu, \lambda, \sigma \dots$) sous-entend la somme sur des indices 0, 1, 2, 3. Toutefois, la répétition d'indice latin (ex. $i, j, k, l \dots$) sous-entend la somme sur des indices 1, 2, 3. À noter : des indices identiques ici, il y a un indice inférieur (covariant) et un indice supérieur (contravariant) et la somme correspond à un produit scalaire de Lorentz.



Donc, l'expression précédente n'est pas équivalente à

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \neq \Lambda_{\nu}^{\mu} x^i \quad (3.69)$$

puisque la somme dans le terme de droite ne s'effectue que sur les composantes $i = 1, 2, 3$. La transformation inverse de Lorentz peut aussi s'écrire dans cette notation

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma V & 0 & 0 \\ \gamma V & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

ou encore

$$x^{\mu} = \tilde{\Lambda}_{\nu}^{\mu} x'^{\nu} \quad (3.71)$$

où $\tilde{\Lambda}_{\nu}^{\mu} = (\Lambda_{\nu}^{\mu})^{-1}$.

Le tenseur métrique

Réexaminons un quadrivecteur avec plus d'attention. Plus formellement, dans un espace vectoriel à D dimensions, il est possible de choisir D vecteurs de bases e_{μ} et de représenter un vecteur A à partir de ses composantes parallèles aux e_{μ} . Alors tout vecteur A s'écrit

$$A = \sum_{\mu=0}^3 A^{\mu} e_{\mu} = A^{\mu} e_{\mu} \quad (3.72)$$

où A^{μ} sont appelées les composantes contravariantes de A . Dans un changement de système de coordonnées, comme une transformation de Lorentz, les bases deviennent

$$e^{\mu} \rightarrow e'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} e^{\nu}. \quad (3.73)$$

Le produit scalaire de deux vecteurs A et B prend la forme

$$A \cdot B \equiv A^{\mu} e_{\mu} \cdot B^{\nu} e_{\nu} = A^{\mu} B^{\nu} g_{\mu\nu} \quad (3.74)$$

où

$$g_{\mu\nu} \equiv e_{\mu} \cdot e_{\nu} \quad (3.75)$$

est appelé le *tenseur métrique* ou simplement la *métrique*. Il est commun, et plus simple de choisir une base où les vecteurs de base sont *orthogonaux* : soit,

$$g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu \quad (3.76)$$

et donc

$$A \cdot B = A^{\mu} B^{\mu} e_{\mu} \cdot e_{\mu} \quad (3.77)$$

Pour le cas des quadrivecteurs d'espace-temps dans l'espace de Minkowski, la « longueur généralisée », la *pseudo-norme*, d'un vecteur espace-temps est reliée à l'intervalle, ex.

$$\begin{aligned} x \cdot x &= x^2 = x^{\mu} x^{\mu} e_{\mu} \cdot e_{\mu} \\ &= (x^{\mu})^2 e_{\mu} \cdot e_{\mu} \\ &= (x^0)^2 e_0 \cdot e_0 + (x^1)^2 e_1 \cdot e_1 + (x^2)^2 e_2 \cdot e_2 + (x^3)^2 e_3 \cdot e_3 \\ &= t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$= (\Delta s^2) \quad (3.79)$$

alors la *pseudo-norme* des vecteurs de base est

$$e_\mu \cdot e_\mu = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = 0 \\ -1 & \text{si } \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (3.80)$$

et le tenseur métrique s'écrit

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

Composantes covariantes

Nous avons vu que le vecteur A est défini en terme des composantes *contravariantes* A^μ , c'est-à-dire $A = A^\mu e_\mu$. Cette définition n'est pas unique. Il est possible et souvent utile d'utiliser un autre choix de vecteurs unitaires et de composantes, les composantes *covariantes*. Les composantes *covariantes* sont des projections orthogonales de A sur les vecteurs de base e_μ . Par exemple,

$$e_\mu \cdot A \equiv A_\mu \quad (3.82)$$

(à noter l'indice inférieur) ou autrement dit

$$\begin{aligned} A_\mu &\equiv e_\mu \cdot A = e_\mu \cdot A^\nu e_\nu \\ &= g_{\mu\nu} A^\nu \end{aligned}$$

Le vecteur A peut alors s'écrire en se servant des composantes covariantes et les vecteurs de base e^μ

$$A \equiv A_\mu e^\mu.$$

et de la même façon on peut définir

$$g^{\mu\nu} = e^\mu \cdot e^\nu$$

et on vérifie que $g^{\mu\nu}$ est aussi

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.83)$$

À noter, le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et son inverse $g^{\mu\nu}$ coïncident

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad (3.84)$$

et

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} &= I_{4 \times 4} = \delta_\lambda^\mu \\ g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} &= (I_{4 \times 4}) = 4. \end{aligned}$$

Finalement, on en tire la relation entre les composantes contravariantes et covariantes

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (3.85)$$

$$A_\nu = g_{\mu\nu} A^\mu. \quad (3.86)$$

Par exemple, pour le quadrivecteur contravariant de position

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{x}) \quad (3.87)$$

on aura un quadrivecteur covariant de position :

$$\begin{aligned}
 x_\nu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) \\
 &= g_{\mu\nu} x^\mu \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\
 &= (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

et donc

$$\begin{aligned}
 x^\mu &= (t, \mathbf{x}) && \text{composantes contravariantes} \\
 x_\mu &= (t, -\mathbf{x}). && \text{composantes covariantes}
 \end{aligned}$$

Pour un vecteur arbitraire a dont les composantes contravariantes sont a^μ

$$\begin{aligned}
 a^\mu &= (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \mathbf{a}) && \text{composantes contravariantes} \\
 a_\mu &= (a^0, -a^1, -a^2, -a^3) = (a^0, -\mathbf{a}) && \text{composantes covariantes}
 \end{aligned}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs a et b quelconques est donné par

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 a \cdot b &= a^\mu b_\mu \\
 &= (a^0, \mathbf{a}) \cdot (b^0, -\mathbf{b}) \\
 &= a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\
 &= a_\mu b^\mu.
 \end{aligned}$$

Remarque 3.6

i Pour deux vecteurs de Lorentz a et b , le produit scalaire

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu$$

est un invariant de Lorentz, c'est-à-dire que cette quantité n'est pas affectée par une transformation de Lorentz et donc a la même valeur dans tous les systèmes de référence inertiels **i**

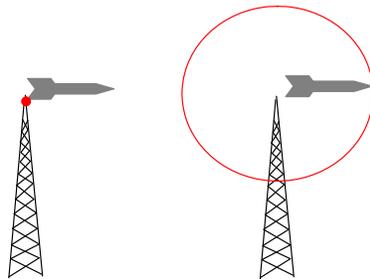


Figure 3.15 ◀▶ Signal radio et fusée.

Exemple 3.8

◆ Un repère S' se déplace à une vitesse 0.8 par rapport au repère S . Les horloges sont ajustées de telle sorte qu'à $t = t' = 0$, on a $x = x' = 0$. Deux événements se produisent : l'événement 1 à $x_1 = 10\text{ m}$, $t_1 = 60\text{ m}$ et l'événement 2 à $x_2 = 50\text{ m}$, $t_2 = 90\text{ m}$. Quelle distance, dans S' , sépare les endroits où se sont produits les deux événements ?

Une réponse trop hâtive serait d'utiliser la formule de contraction des longueurs

$$\Delta x' = \frac{1}{\gamma} \Delta x$$

c'est-à-dire, comme $\gamma = \frac{5}{3}$:

$$\Delta x' = \frac{3}{5}(40 \text{ m}) = 24 \text{ m.}$$

Mais cette façon de procéder indique que l'on a pas respecté la règle qui s'applique pour le calcul des contractions de longueurs, il faut que les positions soient notées au même instant dans S' . Dans le cas qui nous concerne, nous avons plutôt

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma(\Delta t - V\Delta x) \\ &= \frac{5}{3}(30 \text{ m} - 0.8 \cdot 40 \text{ m}) \\ &= -3.3 \text{ m} \neq 0 \end{aligned}$$

Calculons cette fois-ci $\Delta x'$ de la bonne manière :

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - V\Delta t) \\ &= \frac{5}{3}(40 \text{ m} - 0.8 \cdot 30 \text{ m}) \\ &\approx 27 \text{ m} \end{aligned}$$

ce qui est différent du 24 m obtenu plus haut.

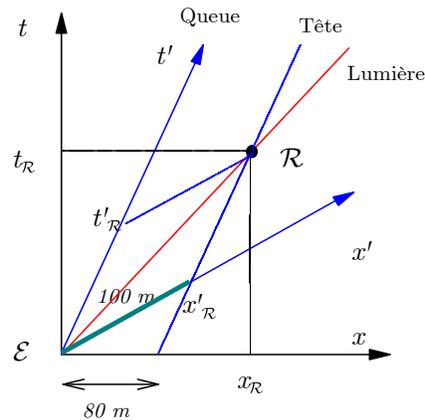


Figure 3.16 ◀ Diagramme espace-temps de la fusée.

Exemple 3.9

Une fusée de 100 m de long (longueur propre) se déplace à la vitesse 0.6 par rapport à la Terre. Un signal radio est émis d'une station terrestre au moment où la queue de la fusée passe vis-à-vis de cette station.

- (a) À quelle distance, pour les observateurs terrestres, se trouve la tête de la fusée au moment où un récepteur placé dans la tête reçoit le signal ?
- (b) Toujours pour les observateurs terrestres, quelle durée s'est écoulée entre l'émission (événement \mathcal{E}) et la réception (événement \mathcal{R}) ?
- (c) D'après des mesures faites par des observateurs de la fusée, combien de temps s'est écoulé entre \mathcal{E} et \mathcal{R} ?

Ce problème est illustré par le diagramme de Minkowski à la figure ci-contre. Identifions tout d'abord les événements et leurs coordonnées.

événement \mathcal{E}	$x = x' = 0$	$t = t' = 0$
événement \mathcal{R}	$x = x_{\mathcal{R}}$	$t = t_{\mathcal{R}}$
	$x' = x'_{\mathcal{R}}$	$t' = t'_{\mathcal{R}}$

avec ici,

$$\gamma = \left[1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{4}$$

Pour la Terre, la fusée a donc une longueur de 80 m.

(a) On cherche à connaître $x_{\mathcal{R}}$. Il y a deux façon de le calculer :

(i) graphiquement, on note tout de suite que

$$x_{\mathcal{R}} = 80 \text{ m} + V \cdot t_{\mathcal{R}}$$

où $V = \tan \alpha$ mais comme on voit que $x_{\mathcal{R}} = t_{\mathcal{R}}$ alors on en tire que

$$x_{\mathcal{R}} = \frac{80 \text{ m}}{1 - V} = \frac{80 \text{ m}}{0.4} = 200 \text{ m}$$

(ii) ou en utilisant les transformations de Lorentz,

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{R}} &= \gamma(x'_{\mathcal{R}} + Vt'_{\mathcal{R}}) \\ &= \gamma(100 \text{ m} + 0.6 \cdot 100 \text{ m}) = 200 \text{ m} \end{aligned}$$

la valeur de $t'_{\mathcal{R}} = 100 \text{ m}$ provient du fait que dans S' la durée entre les événements est de $\frac{100}{c} = 100$.

(b) On cherche à connaître $t_{\mathcal{R}}$.

(i) graphiquement, $t_{\mathcal{R}} = x_{\mathcal{R}} = 200 \text{ m}$

(ii) par déduction, si $x_{\mathcal{R}} = 200 \text{ m}$, alors le temps requis pour parcourir cette distance par la lumière est $t_{\mathcal{R}} = 200 \text{ m}$

(c) On veut ici calculer $t'_{\mathcal{R}}$, et on peut le faire de deux façons :

(i) graphiquement, par observation, on note tout de suite que

$$t'_{\mathcal{R}} = x'_{\mathcal{R}} = 100 \text{ m}$$

(ii) ou en utilisant les transformations de Lorentz,

$$\begin{aligned} t'_{\mathcal{R}} &= \gamma(t_{\mathcal{R}} - Vx_{\mathcal{R}}) \\ &= \frac{5}{4} \left(200 \text{ m} + \frac{3}{5} \cdot 200 \text{ m} \right) = 100 \text{ m}. \end{aligned}$$

Exemple 3.10

⚡ Une voiture de formule 1 réussit à atteindre une vitesse de $0.8c$. Supposons que la voiture peut être représentée par un rectangle de 5 m de longueur par 2 m de largeur.

(a) Pour un observateur à la ligne d'arrivée, quel est la longueur et la largeur du bolide ?

(b) À l'arrivée de la voiture, on prend un « photofinish ». Sur la photo la voiture semble avoir effectué une rotation d'un angle θ . Justifiez numériquement et trouvez l'angle apparent de rotation θ .

(c) Quel est l'aspect du véhicule sur la photo dans la limite où la vitesse de la voiture tend vers c ?



(a) Il y a contraction de Lorentz pour les dimensions parallèles à la vitesse de la voiture (longueur = L , largeur = l)

$$L' = \frac{L}{\gamma} = \sqrt{1 - V^2} L = 3\sqrt{1 - (0.8)^2} = 3 \text{ m}$$

La largeur l reste la même (\perp à la vitesse)

(b) La projection du côté de la voiture est de longueur :

$$L' = \frac{L}{\gamma} = \sqrt{1 - V^2} L$$

3. Transformations de Lorentz

La projection de l'arrière de la voiture sera doit tenir compte du délai entre signal du côté rapproché et côté éloigné soit

$$\Delta t = \frac{l}{c} = l$$

Pendant Δt , le côté rapproché s'est déplacé de

$$l' = Vl = 0.8 \times 2 = 1.6$$

donc l'arrière de la voiture semble avoir une étendue $l' = Vl$. La position des deux phares arrières de la voiture est donc caractérisée par

$$\begin{aligned} \text{largeur de la voiture} & : & l \\ \text{séparation parallèlement à } V & : & Vl \end{aligned}$$

donc l'arrière de la voiture semble inclinée de

$$\sin \theta = \frac{Vl}{l} = V$$

De la même façon, les extrémités du côté de la voiture est donc caractérisée par

$$\begin{aligned} \text{longueur de la voiture} & : & L \\ \text{projection parallèlement à } V & : & \sqrt{1 - V^2}L \end{aligned}$$

donc côté de la voiture semble inclinée de

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{1 - V^2}L}{L} = \sqrt{1 - V^2}$$

L'angle de rotation apparent du véhicule est donc

$$\begin{aligned} \theta & = \arcsin(V) = \arcsin 0.8 = 0.927 \\ \text{unitrad} & = 53.1^\circ \\ & = \arccos(\sqrt{1 - V^2}) = \arccos(\sqrt{1 - (0.8)^2}) = 0.927 \\ \text{unitrad} & = 53.1^\circ \end{aligned}$$

(c) Dans la limite où $V \rightarrow 1$,

$$\theta = \arcsin(V) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

donc on ne verra que l'arrière de la voiture sur la photo.

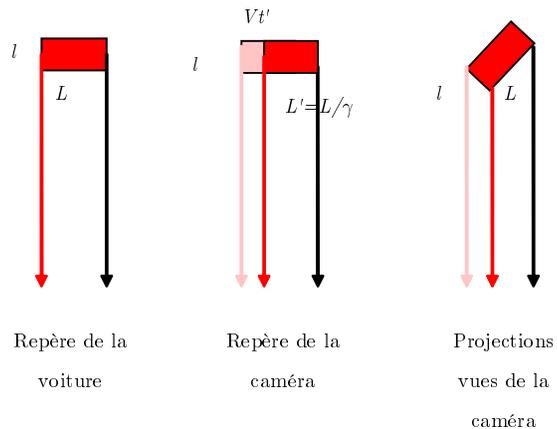


Figure 5.24 ◀▶ Rotation apparente de la voiture

3.9 Exercices

3.9.1 Transformations de Lorentz

3.1 Cadillac versus Géo Métro

Considérez un univers où la vitesse de la lumière est égale à 100 km/s . Une limousine Cadillac se déplaçant à une vitesse v dépasse une Smart roulant à la vitesse limite $v_{\text{lim}} = 0.5c = 50 \text{ km/s}$. De combien la Cadillac dépasse-t-elle la vitesse limite si sa longueur telle que mesurée par un observateur au repos est la même que celle mesurée pour la Smart ? On suppose que la longueur propre de la Cadillac est le triple de celle de la Smart.

3.2 Contraction des longueurs

Une tige de longueur L' , au repos dans le repère S' , fait un angle θ' par rapport à l'axe x' . Déterminez la longueur L et l'angle θ tels que mesurés dans le repère S . Le repère S' se déplace à vitesse constante v selon l'axe x du repère S .

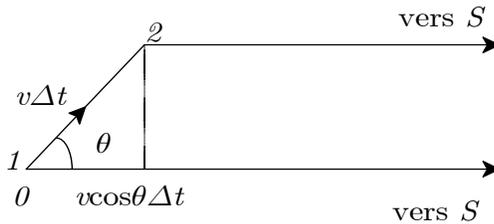


Figure 3.18 ◀
Schéma de la situation décrite au problème 3.3

3.3 Lancement de fusée

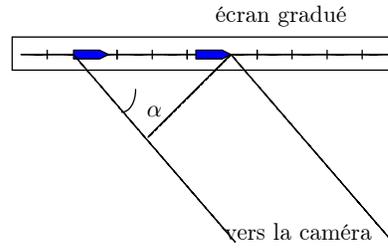
Une fusée est lancée d'un point O à une vitesse v et à un angle θ par rapport à un observateur S situé à une très grande distance D de O . Le point O est considéré au repos par rapport à l'observateur S . La grande distance nous permet de supposer que les différentes lignes de visée vers la fusée sont, à toutes fins utiles, parallèles (voir la figure 3.18)

- En supposant que la fusée met un temps Δt pour se déplacer du point 1 au point 2, obtenez d'abord une expression pour le délai apparent Δt_{app} mesuré par l'observateur (on doit tenir compte du fait que le point 2 est plus près de S que le point 1) et obtenez ainsi une expression pour la vitesse transversale (c'est-à-dire perpendiculaire à la ligne de visée) apparente v_{app} de la fusée. En d'autres termes, il s'agit de déterminer à quelle vitesse le point représentant la position de la fusée sur le ciel apparaîtra se déplacer tel que vu par l'observateur S .
- Montrez que cette vitesse peut dépasser la vitesse de la lumière et expliquez pourquoi ceci ne pose aucun problème. [Indice : trouvez l'angle θ_0 pour lequel la vitesse apparente est maximum.]

3.4 Longueur apparente d'une fusée

Une caméra éloignée (lignes de visée parallèles !) enregistre la position instantanée d'une fusée de longueur propre b se déplaçant à vitesse v selon l'axe des x (voir la figure 3.19). On a choisi le temps de pose suffisamment court de façon à ce que la fusée n'apparaisse pas floue. Juste derrière la fusée (distance écran-fusée égale à zéro) et parallèle à sa trajectoire, se trouve un écran gradué que la fusée éclipse lors de son passage. L'écran est au repos par rapport à la caméra et la caméra est à un angle α par rapport au vecteur vitesse de la fusée. Quelle sera la longueur apparente de la fusée sur la photo ? En d'autres termes, quelle est la longueur d'écran cachée par la fusée sur la photo ?

Figure 3.19 ◀▶
Schéma de la situation décrite au problème 3.4



3.5 Rayon cosmique

Un neutron ayant une énergie cinétique de 10^{14} MeV se déplace dans la Galaxie selon une direction perpendiculaire au plan galactique. On appelle rayons cosmiques les particules ayant une énergie aussi considérable. Pour simplifier le problème, on suppose que la Galaxie ressemble à un disque d'une épaisseur $D = 300 \text{ al}$ et de rayon $R = 50000 \text{ al}$. (La masse du neutron est 980 MeV^2)

- (a) Quel est le facteur de Lorentz γ du neutron ?
- (b) Quelle serait l'épaisseur apparente de la Galaxie telle que mesurée dans le repère du neutron ?
- (c) La durée de vie du neutron est de 10^3 s . Si le neutron se déplaçait selon une direction radiale dans le plan de la Galaxie, aurait-il le temps de traverser la Galaxie avant de se désintégrer ?

3.6 Voyage interstellaire

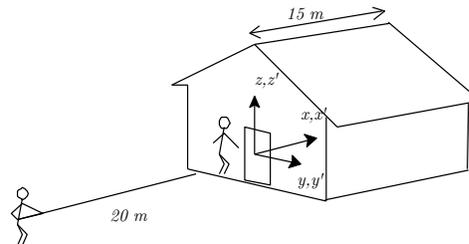
Vous désirez voyager jusqu'à une étoile située à $N \text{ al}$ ($1 \text{ al} = \text{année-lumière}$) de la Terre. À quelle vitesse devez-vous vous déplacer pour que le voyage dure N années de votre vie ?

3.7 MM Laperche et Lagrange revisité

Un coureur rapide, M. Laperche, portant une perche de 20 m , s'approche d'une grange, à une vitesse de 0.8 . Son ami, M. Lagrange, se tient près de la porte ouverte de cette grange, dont la longueur est de 15 m (voir figure 3.20).

- (a) Selon M. Lagrange, quelle est la longueur de la perche portée par M. Laperche ?
- (b) Aussitôt que M. Laperche est entré dans la grange avec sa perche, M. Lagrange ferme la porte. Combien de temps s'est écoulé, selon M. Lagrange, entre le moment où il ferme la porte et le moment où l'extrémité de la perche frappe le mur opposé à la porte ? De quel type est l'intervalle entre ces deux événements ?
- (c) Dans le repère de M. Laperche, quelle est la longueur de la grange ?
- (d) Est-ce que M. Laperche pense que la perche est entièrement dans la grange lorsque sa perche frappe le mur ? Et lorsque la porte se ferme ?
- (e) Discutez ce problème en vous appuyant sur des graphiques bien tracés. Prendre comme événement origine à $t = t' = 0$, l'entrée de la tête de la perche dans la grange à $x = x' = 0$ (sur la figure les systèmes S et S' coïncident donc à $t = t' = 0$). Faites l'hypothèse que la perche est rigide et que le mur du fond de la grange est facile à défoncer.

Figure 3.20 ◀▶
Schéma de la situation décrite au problème 3.7



3.8 Tube cathodique

Les électrons d'un tube cathodique de télévision se déplacent dans le tube à 30% de la vitesse de la lumière. Par quel facteur le tube sera-t-il réduit dans le référentiel des électrons relativement à sa longueur au repos ?

²1 al = 1 année-lumière

3.9 Voyage vers α du Centaure

L'étoile la plus rapprochée de nous au-delà du système solaire, l' α du Centaure ou Rigel Kentaurus, se trouve à une distance de 4 al .³ Un vaisseau spatial peut se rendre à l'étoile en 5 a tel que mesuré sur la Terre.⁴

- Combien de temps le voyage durera-t-il du point de vue du pilote du vaisseau ?
- Quelle est la distance Terre-étoile du point de vue du pilote du vaisseau ?

3.10 Les retrouvailles

Les jumeaux A et B vivent sur la Terre. Le jour de leur 20 ans le jumeau B monte dans un vaisseau en vue d'atteindre une étoile située à 30 al (tel que mesuré de la Terre)⁵. Sachant que le vaisseau se déplace à $0.95c$, quels seront les âges des jumeaux quand ils seront de nouveau réunis ?

3.11 Désintégration de l'oxygène 15

L' O^{15} radioactif se désintègre à un taux tel que la moitié des atomes d'un échantillon se désintègrent à toutes les 2 min . Si un tube contient 1000 atomes de O^{15} et qu'il se déplace à $0.8c$ par rapport à la Terre pendant 6.67 min , combien d'atomes restera-t-il lorsque le temps se sera écoulé ?

3.12 Observations dans le système solaire

La Terre et le Soleil sont distants de 8.33 minutes-lumière. Un événement A se produit sur la Terre à $t = 0$ et un événement B sur le Soleil à $t = 2.45 \text{ min}$ (tel que mesuré dans le référentiel Terre-Soleil). Déterminez lequel des événements se produira le premier et la différence de temps entre A et B si :

- vous vous déplacez de la Terre au Soleil avec $v = 0.75c$
- vous vous déplacez du Soleil à la Terre avec $v = 0.75c$
- vous vous déplacez de la Terre au Soleil avec $v = 0.294c$.

3.13 Dispute de dimension galactique

Deux civilisations évoluent sur les côtés opposés d'une galaxie de 10^5 al de diamètre⁶. Ils se disputent presque depuis toujours. Au temps $t = 0$, dans le référentiel de la galaxie, la civilisation A envoie son premier engin spatial dans le but de détruire la civilisation B . Quant à elle, la civilisation B envoie son premier engin spatial 50000 ans plus tard. Un être d'une civilisation C traverse la galaxie à $0.99c$ sur une ligne allant de A à B .

- La civilisation B pouvait-elle être informée de l'attaque de la civilisation A ?
- Pour l'être de la civilisation C , quelle civilisation a envoyé son engin spatial en premier ?
- Si la civilisation B avait lancé son engin spatial 1000000 ans après la civilisation A , les résultats précédents seraient-ils les mêmes ?
- Pourrait-il y avoir un observateur qui verrait les deux lancements en même temps ? Si oui, quelle devrait être sa vitesse par rapport à la galaxie (considérez les deux moments d'attaque de la part des B) ?

3.14 Problème de longueur

Soient deux vaisseaux de 25 m de longueur. Cette longueur est mesurée dans leur référentiel au repos respectif. Le vaisseau A s'approche de la Terre à $0.65c$. Le vaisseau B s'approche de la Terre à $0.5c$ mais dans la direction opposée. Déterminez la longueur du vaisseau B telle que mesurée :

- dans le référentiel de la Terre,
- dans le référentiel du vaisseau A .

3.15 Équation d'onde

Montrez que l'équation d'onde sphérique de lumière est invariante sous les transformations de Lorentz. (l'onde en question a la forme : $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$)

3.16 Accélération

Soit deux référentiels K et K' , K' se déplace à une vitesse v par rapport à K . Trouvez d'abord les transformations de Lorentz pour les accélérations, puis appliquez les pour trouver les composantes parallèle et perpendiculaire de l'accélération dans K d'une

³ $1 \text{ a} = 1 \text{ an}$.

⁴ $1 \text{ al} = 1 \text{ année-lumière}$.

⁵ $1 \text{ al} = 1 \text{ année-lumière}$.

⁶ $1 \text{ al} = 1 \text{ année-lumière}$.

particule qui, dans K' , a une vitesse \mathbf{u} et une accélération \mathbf{a} .

3.17 **Vitesses**

On effectue deux transformations de Lorentz successives pour des vitesses v_1 et v_2 . Trouvez la vitesse v qui donnerait le même résultat, mais avec une seule transformation ?

3.18 **Particules**

Dans un référentiel O , une particule « a » est au repos et une particule « b » a une vitesse de v . Trouvez la vitesse V d'un référentiel O' pour que les deux particules aient la même vitesse dans des directions opposées.

3.19 **Référentiels**

Soit un référentiel O et un référentiel O' . Le référentiel O' s'éloigne de O avec une vitesse V selon l'axe des x . Une particule dans O' a une vitesse v' et forme un angle θ' avec l'axe des x . Trouvez l'angle dans O

3.20 **Processus radioactif**

Dans un certain processus radioactif, un noyau émet deux électrons à même vitesse en sens opposés. Trouvez la vitesse de un par rapport à l'autre, si la vitesse par rapport au noyau est de 0.67 pour chaque électron ?

3.21 **Boîte cubique**

Une petite boîte cubique de côté b est lancée parallèlement à une de ses face avec une vitesse v . Quel est son volume apparent ?

3.22 **Durée de vie moyenne**

Les mésons ont une durée de vie moyenne au repos de 2.2×10^{-6} s. Ils sont créés à une altitude de 10 km et voyagent à une vitesse de 0.995 vers la terre. Trouvez :

- (a) la durée de vie moyenne des mésons telle que vue sur terre
- (b) le temps mis pour arriver au sol tel que vu sur terre
- (c) le temps mis pour arriver sur terre pour un méson.

3.23 **Rythme cardiaque**

Un astronaute a normalement un rythme cardiaque de 72 battements par minutes. Si il est dans un vaisseau voyageant à 0.68 , quel est son rythme cardiaque perçu sur terre

- (a) si le vaisseau s'en approche et
- (b) si le vaisseau s'en éloigne

3.24 **L'impossibium**

Un géologue d'une planète éloignée découvre une nouvelle forme d'élément : l'impossibium. Il décide de montrer sa découverte à ses collègues sur terre. Il prépare deux boites contenant exactement la même quantité de minerai. Il en garde une pour l'étudier, et il envoie l'autre vers la terre à bord d'un vaisseau voyageant à une vitesse de 0.86 . Une fois le vaisseau parti, le géologue se rend compte que la demi-vie du minerai est d'une journée (c'est-à-dire le minerai diminue de moitié à chaque jour). Lorsqu'il reste un vingtième de la quantité initiale dans la boîte sur la planète du géologue, quel fraction du minerai initial reste-t-il dans le vaisseau (le vaisseau n'est toujours pas arrivé sur terre) ?

3.25 **Navette de secours**

Un explorateur pressé parcourt la galaxie à bord d'un superbe vaisseau voyageant à une vitesse de 0.75 . Il rencontre en chemin un pauvre extraterrestre en panne d'essence. L'explorateur décide de lui envoyer sa navette de secours pour qu'il puisse se rendre à une station service. Sachant que le vaisseau de l'explorateur s'éloigne de l'extraterrestre, et sachant que pour l'explorateur la navette a une vitesse de 0.78 et une longueur de 15 m, quel est la longueur de la navette (a) au repos et (b) pour l'extraterrestre ?

3.26 **Courses interplanétaires**

Dans un lointain futur, on pourra assister à des courses interplanétaires. Supposons qu'une course oppose l'explorateur pressé (0.75) au vaisseau rempli de minerai (0.86). Les deux vaisseaux partent en même temps et se dirigent vers une planète à 12 al de leur point de départ. Lorsque les deux participants se rencontrent enfin, quel est celui qui a vieilli le plus, et de combien d'années ?

3.27 **Un explorateur**

Si un explorateur se rendait sur la frontière de la galaxie d'Andromède (2×10^6 al)

en 50a et que, rendu sur place, il décide d'envoyer un message radio sur terre pour informer le monde de son exploit⁷. Combien d'années après le départ de l'explorateur, la Terre reçoit-elle le message ?

3.28 Boîte de conserve relativiste

Dans le but de conserver plus longtemps des choses qui ont une très petite durée de vie, on décide d'inventer une « boîte de conserve relativiste ». Cette machine est simplement une immense tige de 1 km de long que l'on fait tourner à grande vitesse, avec, à une de ses extrémités, une petite boîte pour contenir la chose à conserver. Trouvez la vitesse angulaire nécessaire pour allonger la vie d'un facteur (a) 2 (b) 5 et (c) 20 (ne vous préoccupez pas de la force centrifuge que ressent l'objet dans la « boîte de conserve », c'est un problème fictif)

3.29 Milieu translucide

Dans un milieu translucide d'indice de réfraction n , la lumière se propage à une vitesse $1/n$. Quelle vitesse la lumière a-t-elle si elle se propage vers l'aval d'un courant qui a une vitesse V par rapport à un observateur fixe ?

3.30 Deux véhicules

Dans un repère O , on voit deux véhicules se déplacer parallèlement. Le premier roule à 0.9 et le deuxième à 0.7. Trouvez la vitesse de l'un par rapport à l'autre.

3.31 Métrique

Trouver le résultat général pour $g^{\mu\nu}g_{\alpha\nu}$

3.32 Deux vaisseaux

Deux vaisseaux d'une longueur de 100 m approchent l'un vers l'autre. Un astronaute dans le premier vaisseau mesure que l'autre vaisseau prend 2.5×10^{-6} s pour passer devant lui.

- Quelle est la vitesse relative des vaisseaux ?
- Toujours d'après le même astronaute, combien de temps prend un point du deuxième vaisseau pour franchir toute la longueur du premier vaisseau ?

3.33 Un rayon cosmique

Un rayon cosmique arrive vers le pôle sud avec une vitesse de 0.787. Un autre fonce sur la terre vers le pôle nord à une vitesse de 0.612. Si on se place de manière à voir un des rayons au repos, à quelle vitesse l'autre s'approche-t-il ?

3.34 Spock et les Klingons

Un vaisseau Klingon (repère S') passe l'*Enterprise* (repère S) à une vitesse $v = 0.6c$ selon l'axe des x . Comme d'habitude, on suppose que les origines des deux systèmes de coordonnées coïncident à $t = t' = 0$. Spock (vaisseau S) observe un missile lancé du vaisseau Klingon et passant l'origine de son système de coordonnées à $t = 0$ avec une vitesse $v = 0.4c$. Déterminez la trajectoire du missile, c'est-à-dire sa position en fonction du temps, telle que mesurée dans S' .

3.35 Vaisseaux

Un vaisseau arborant l'insigne de la figure 3.21 passe devant un autre vaisseau (qui, lui, est au repos) avec une vitesse de 0.95. À combien de degrés par rapport à la verticale les habitants du deuxième vaisseau voient ils la barre oblique du symbole ?

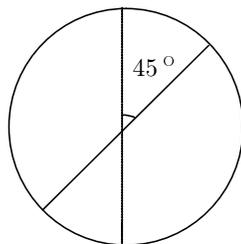
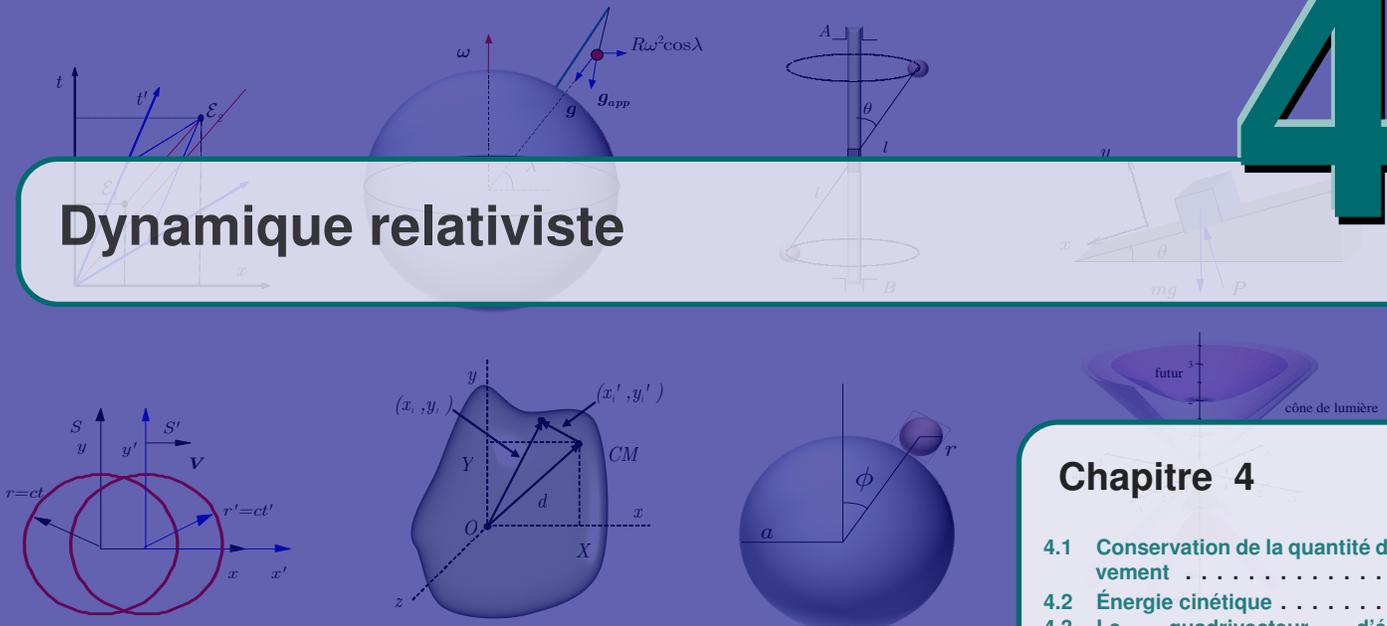


Figure 3.21 ◀▶
Schéma de la situation décrite au problème 3.35

⁷1 a = 1 an.

Dynamique relativiste



Chapitre 4

- 4.1 Conservation de la quantité de mouvement 61
- 4.2 Énergie cinétique 63
- 4.3 Le quadrivecteur d'énergie-impulsion 63
- 4.4 Travail et énergie cinétique 66
- 4.5 Transformations de Lorentz de l'énergie-impulsion 67
- 4.6 Exemple : collision inélastique 70
- 4.7 Exemples quantitatifs 71
- 4.8 Particules de masse nulle 72
- 4.9 Effet Doppler-nouvelle approche 73
- 4.10 Pression de radiation 73
- 4.11 Transformation d'une force 74
- 4.12 Invariance de la charge électrique 75
- 4.13 Champ magnétique 75
- 4.14 Le test : les accélérateurs de particules 76
- 4.15 Exemples 77
- 4.16 Exercices 87

LE CHANGEMENT FONDAMENTAL apporté au concept espace-temps nécessite une révision des lois de la mécanique développées pour des vitesses non relativistes. Ainsi $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ n'est pas valide : il suffirait d'appliquer une force constante suffisamment longtemps pour accélérer jusqu'à une vitesse plus grande que celle de la lumière !

Les lois de la mécanique sont toujours soumises au principe de l'invariance galiléenne. En incorporant la transformation de Lorentz à ce principe, on dira que

Postulat 4.1

Les lois fondamentales de la physique ont la même forme dans tous les repères reliés par une transformation de Lorentz

4.1 Conservation de la quantité de mouvement

Pour une collision de deux particules de même masse M , vue du repère du centre de masse, on a (voir figure 4.1)

$$(p_{1y} + p_{2y})_{\text{avant}} = (p_{1y} + p_{2y})_{\text{après}} \tag{4.1}$$

$$\implies \Delta p_{1y} = -\Delta p_{2y}. \tag{4.2}$$

Si $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$:

$$\Delta p_{1y} = -\Delta p_{2y} = -2m_0 v_y. \tag{4.3}$$

La conservation de la quantité de mouvement dans le repère S du centre de masse provient davantage de la symétrie que de sa définition !

Reconsidérons la même collision dans un repère S' de vitesse (voir figure 4.2)

$$\mathbf{V} = v_x \mathbf{e}_x \tag{4.4}$$

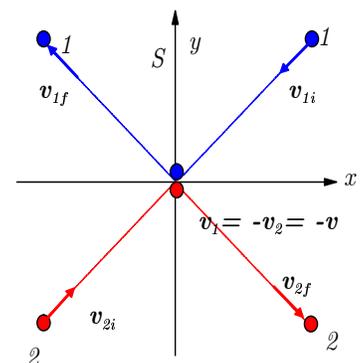


Figure 4.1 ▲ Collision de deux particules de même masse, vue du repère du centre de masse.

par rapport au repère S du centre de masse. Dans S' on doit avoir

$$v'_{1y} = \frac{-v_y}{\gamma(1+v_x V)} = \frac{-v_y}{(1+v_x^2)^{\frac{1}{2}}(1-v_x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.5)$$

$$v'_{2y} = \frac{v_y}{\gamma(1-v_x V)} = \frac{v_y}{(1-v_x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.6)$$

Ainsi $|v'_{1y}| \neq |v'_{2y}|$.

Pour la définition newtonienne de la quantité de mouvement, on a donc $\Delta p'_{1y} \neq -\Delta p'_{2y}$!

Si l'on veut conserver la loi de la quantité de mouvement, on doit lui trouver une nouvelle définition qui soit compatible avec l'invariance de Lorentz. Cette nouvelle définition de \mathbf{p} doit se réduire à $M\mathbf{v}$ pour $|\mathbf{v}| \ll c = 1$. À cause de la transformation de Lorentz, nous savons que Δt n'est pas le même dans tous les repères. Ainsi $v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ n'a pas la même valeur dans tous les repères en mouvement relatif suivant l'axe x . Par contre, si l'observateur se sert de l'horloge de la particule, c'est-à-dire le temps propre de celle-ci, $\frac{\Delta y}{\Delta \tau} = \gamma \frac{\Delta y}{\Delta t}$ est invariant pour les repères.

Alors, si on définit $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$, on aura $p_y = m_0 \frac{\Delta y}{\Delta \tau}$ avec la même valeur dans tous les repères en mouvement relatif suivant x .

$$\mathbf{p} = m_0 \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \tau} = \gamma m_0 \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \gamma m_0 \mathbf{v}. \quad (4.7)$$

où $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ (voir figure 4.3).

Dans cette définition :

1. τ est le temps propre de la particule, le temps mesuré dans le repère de la particule au repos ;
2. γ est calculé avec la vitesse $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ de la particule par rapport au référentiel dans lequel on veut trouver l'impulsion et non pas une vitesse relative entre deux référentiels comme c'est le cas dans une transformation de Lorentz.
3. m_0 est la masse au repos de la particule, la seule que l'on puisse mettre sur une balance.

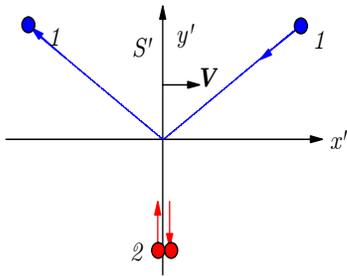


Figure 4.2 ▲ Collision dans un repère S' .

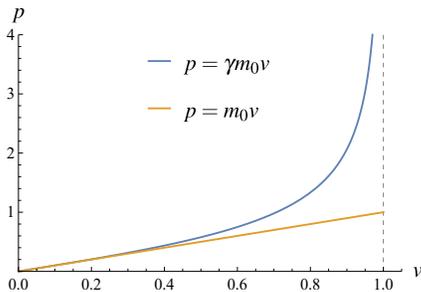


Figure 4.3 ▲ Le momentum $p = \gamma m_0 v$ (en unités arbitraires) en fonction de v .

Remarque 4.1

i On fait souvent référence à la quantité γm_0 en parlant de la *masse relativiste*. En fait, γm_0 correspond à une quantité d'*énergie relativiste* associée à l'objet en mouvement (voir section suivante). Pour éviter toute confusion avec la masse au repos, nous utiliserons plutôt les termes *énergie relativiste* ou *énergie totale* dans ce qui suit. **i**

Définition 4.1

i La quantité de mouvement relativiste est donnée par

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$$

où $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$. **i**

Ici, aucune force n'est présente puisque nous travaillons avec des objets ou repères en mouvement uniforme. Alors pour que la loi de conservation de la quantité de mouvement conserve sa forme (2^e postulat), il faut la quantité de mouvement totale d'un système est conservée. La quantité de mouvement totale d'un système est la somme vectorielle des quantités de mouvement individuelles

$$\mathbf{P} = \sum_n \mathbf{p}_n. \quad (4.8)$$

alors

$$\mathbf{P}_{\text{avant}} = \mathbf{P}_{\text{après}} \quad (4.9)$$

4.2 Énergie cinétique

Pour une particule de vitesse \mathbf{v} , on forme, avec

$$\gamma = (1 - \mathbf{v}^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{où} \quad \beta = \mathbf{v}, \quad (4.10)$$

l'invariant

$$1 = \gamma^2 - \gamma^2 \mathbf{v}^2 \equiv 1 \quad (4.11)$$

multiplié par le carré d'une masse m_0^2 , cette expression devient

$$\begin{aligned} m_0^2 &= (\gamma m_0)^2 - (\gamma m_0 \mathbf{v})^2 \\ &= (\gamma m_0)^2 - \mathbf{p}^2. \end{aligned}$$

$$\gamma = (1 - \mathbf{v}^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.12)$$

l'invariant

$$1 = \gamma^2 - \mathbf{v}^2 \gamma^2 \quad (4.13)$$

multiplié par la masse au repos m_0^2 , cette expression devient

$$\begin{aligned} m_0^2 &= (\gamma m_0)^2 - (\gamma m_0 \mathbf{v})^2 \\ &= (\gamma m_0)^2 - \mathbf{p}^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

L'expression de droite est donc invariante. Cela suggère que γm_0 pourrait être une quantité importante. m_0^2 et \mathbf{p}^2 sont facilement identifiable : il s'agit de la masse au repos et de la quantité de mouvement d'un objet. Mais à quoi correspond la quantité γm_0 ? Voyons ce qu'on a pour de petites vitesses ($\mathbf{v}^2 \ll 1$)

$$\begin{aligned} \gamma m_0 &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \dots \right) \\ &= m_0 + \frac{1}{2} m_0 \mathbf{v}^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.15)$$

Au deuxième terme du développement, on reconnaît l'énergie cinétique non relativiste. Ce résultat suggère la définition

$$E = \gamma m_0 \quad \text{pour l'énergie totale d'une particule libre.}$$

Ainsi,

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2 \quad (4.16)$$

est un invariant de Lorentz au même titre que $t^2 - \mathbf{r}^2 = \tau^2$.

4.3 Le quadrivecteur d'énergie-impulsion

Les notions d'énergie et d'impulsion sont intimement liées (tout comme l'espace et le temps). Ce lien devient évident dans la notation quadrivectorielle (ou covariante). Revoyons ces concepts selon de ce nouveau point de vue.

Pour définir une impulsion dans la notation quadrivectorielle, il nous faut d'abord un quadrivecteur de vitesse. Nous possédons déjà un quadrivecteur de déplacement soit

$$\Delta x^\mu = (\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z). \quad (4.17)$$

Le fait de diviser par dt cette quantité ne nous fournit cependant pas un quadrivecteur contravariant puisque la quantité dt n'est pas un invariant relativiste. On sait toutefois qu'il existe une autre quantité ayant les dimensions du temps tout en étant aussi un invariant : le temps propre $d\tau$. Nous définissons donc une nouvelle quantité : la quadri-vitesse u^μ ,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right). \quad (4.18)$$

Pour obtenir un quadrivecteur impulsion modelé sur le vecteur impulsion classique, il nous faut multiplier cette quantité par une quantité invariante ayant les dimensions d'une masse. Ne sachant pas *a priori* si la masse d'une particule est une quantité invariante, nous allons utiliser la masse propre m_0 , c'est-à-dire la masse mesurée dans le repère où elle est au repos comme facteur multiplicatif pour obtenir

$$p^\mu \equiv m_0 u^\mu = \left(m_0 \frac{dt}{d\tau}, m_0 \frac{dx}{d\tau}, m_0 \frac{dy}{d\tau}, m_0 \frac{dz}{d\tau} \right). \quad (4.19)$$

Voilà donc un nouveau quadrivecteur dont on ne sait pas pour l'instant la signification physique. Essayons donc de la préciser. Comme $d\tau = \gamma^{-1} dt$, la partie spatiale de ce quadrivecteur s'écrit :

$$p^j = \gamma m_0 (v^1, v^2, v^3) \quad (4.20)$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v} \quad (4.21)$$

où \mathbf{v} est la vitesse de la particule dans le repère S .

Voyons ce que ça donne pour des vitesses faibles par rapport à celle de la lumière. Pour $v \ll 1$, $\gamma \rightarrow 1$ d'où

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}.$$

C'est là l'impulsion habituelle que nous connaissons.

Qu'en est-il de la composante temporelle p^0 du quadrivecteur impulsion ? Si $v \ll 1$,

$$(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{1}{2} v^2 + \dots \quad (4.22)$$

d'où

$$p^0 = \gamma m_0 = m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \quad (4.23)$$

On reconnaît dans le deuxième terme de cette relation l'énergie cinétique habituelle. Mais qu'en est-il du premier terme qui s'écrit $m_0 c^2$? Cette expression qui est devenue la formule fétiche de la relativité a été interprétée par Einstein comme étant l'énergie propre de la matière. Autrement dit, du seul fait qu'une particule a une masse m_0 , elle a un contenu en énergie de grandeur $m_0 c^2$, lequel contenu, comme le dit Einstein peut-être mis en évidence par les émissions d'atomes lourds comme le radium. On connaît maintenant le sens de cette prédiction...

Il s'avère que le quadrivecteur impulsion est en fait ce qui pourrait être plus approprié d'appeler un quadrivecteur énergie-impulsion

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z) = (\gamma m_0, \gamma m_0 \mathbf{v}) = \gamma m_0 (1, \mathbf{v}) \quad (4.24)$$

puisqu'il inclut E , l'énergie totale. Si on a besoin de l'énergie cinétique, on devra écrire

$$\begin{aligned} T &= E - m_0 \\ &= (\gamma - 1) m_0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} - 1 \right) m_0 \quad (4.26)$$

ce qui signifie, en fait, que l'expression classique $T = \frac{1}{2} m v^2$ n'est qu'une approximation valide pour les vitesses faibles.

Voyons maintenant quelle est la pseudo-norme de p^μ . On écrit donc

$$\begin{aligned} p \cdot p &= p^\mu p_\mu = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta \\ &= (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 \\ &= E^2 - \mathbf{p}^2 \\ &= (\gamma m_0)^2 - (\gamma m_0 \mathbf{v})^2 \\ &= \gamma^2 m_0^2 (1 - v^2) \\ &= m_0^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Ici $p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$ alors que $p_\mu = (E, -p_x, -p_y, -p_z)$ et m_0 est un invariant de Lorentz. On pourra vérifier explicitement que

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 = \text{invariant de Lorentz}$$

si on connaît les transformations de Lorentz de p^μ (nous verrons cela plus loin). C'est aussi le cas de

$$p^\mu x_\mu = x^\mu p_\mu = \text{invariant de Lorentz}$$

puisqu'il s'agit encore une fois d'un produit scalaire de deux quadrivecteurs de Lorentz.

Exemple 4.1

◆ Calculez l'impulsion, l'énergie et l'énergie cinétique d'un proton ($m_p = 0.938 \text{ GeV}$) ayant une vitesse $v = 0.99$.

On a

$$\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} = 7.08$$

d'où on obtient

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}| &= \gamma m |\mathbf{v}| = 6.58 \text{ GeV} \\ E &= \gamma m = 6.64 \text{ GeV} \\ T &= (\gamma - 1)m = 5.70 \text{ GeV}. \end{aligned}$$



La *pseudo-norme* de p^μ est un invariant de Lorentz (c'est-à-dire qu'elle est la même dans tous les repères inertiels) qui correspond à la *masse propre*

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 = E^2 - \mathbf{p}^2$$

ou

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m_0^2. \quad (4.28)$$

En réinsérant la vitesse de la lumière c , on trouve

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (4.29)$$

Les relations de conservation d'énergie et d'impulsion peuvent maintenant être exprimées sous une forme très compacte. L'énergie-impulsion totale d'un système est la somme

$$P^\mu = \sum_n p_n^\mu. \quad (4.30)$$

Si on pose qu'il y a conservation d'énergie et d'impulsion

$$P_{\text{avant}}^\mu = P_{\text{après}}^\mu \quad (4.31)$$

il en découle que

$$P_{\text{avant}}^i = P_{\text{après}}^i \quad \text{ou} \quad \mathbf{P}_{\text{avant}} = \mathbf{P}_{\text{après}} \quad (4.32)$$

ce qui est la conservation de l'impulsion totale et

$$P_{\text{avant}}^0 = P_{\text{après}}^0 \quad \text{ou} \quad E_{\text{avant}}^{\text{tot}} = E_{\text{après}}^{\text{tot}} \quad (4.33)$$

ce qui est la conservation de l'énergie totale.

Il est aussi possible de déduire une autre relation importante. D'une part, la quantité P^μ (l'énergie-impulsion totale) est conservée, et d'autre part, la *grandeur* de toute énergie-impulsion est un invariant relativiste (même pseudo-norme dans tous les repères). On aura donc, par exemple dans un repère arbitraire S

$$\left(P_{S, \text{avant}}^\mu \right)^2 = \left(P_{S, \text{après}}^\mu \right)^2$$

4. Dynamique relativiste

mais puisqu'il s'agit d'invariant de Lorentz (relativiste), cette quantité est la même dans tous les repères. Dans un repère S' on aura

$$\left(P_{S', \text{avant}}^\mu\right)^2 = \left(P_{S', \text{après}}^\mu\right)^2 = \left(P_{S', \text{avant}}^\mu\right)^2 = \left(P_{S', \text{après}}^\mu\right)^2. \quad (4.34)$$

Dans le repère d'impulsion totale nulle (RIN), c'est-à-dire le repère où le centre de masse du système est au repos, les calculs sont généralement plus simples. Alors que la dernière relation tient toujours, on aura dans ce repère spécial, $\mathbf{P}_{\text{RIN}}^{\text{avant}} = 0$ par définition et

$$\begin{aligned} \left(P_{\text{RIN,avant}}^\mu\right)^2 &= \left(P_{\text{RIN,avant}}^0\right)^2 - \left(\mathbf{P}_{\text{RIN,avant}}\right)^2 \\ &= \left(P_{\text{RIN,avant}}^0\right)^2 = \left(E_{\text{RIN,avant}}^{\text{tot}}\right)^2 \\ &= \left(\sum_n E_{n, \text{RIN}}\right)^2 \end{aligned}$$

Donc la quantité $(P^\mu)^2$ est conservée et est la même dans tous les repères. Elle correspond donc au carré de la somme des énergies relativiste si on se trouve dans le RIN.

$$(P^\mu)^2 = \left(\sum_n E_{n, \text{RIN}}\right)^2$$

Notons que les termes “repère du centre de masse (CM)” et “repère d'impulsion totale nulle (RIN)” signifie sensiblement la même chose. Cependant on utilise RIN pour englober les cas où les particules en jeu ont des masses nulles ce qui n'empêche pas de trouver un repère dans lequel l'impulsion totale est nulle.

4.4 Travail et énergie cinétique

Nous avons défini l'énergie cinétique relativiste par l'expression

$$T = E - m_0 = (\gamma - 1) m_0 \underset{\text{pour } v \ll 1}{\simeq} \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (4.35)$$

Pour être formel, il faut vérifier que le travail pour amener une particule de la vitesse v_1 à la vitesse v_2 correspond bien au changement d'énergie cinétique de la particule soit

$$W = T(v_2) - T(v_1). \quad (4.36)$$

Calculons le travail $W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ requis pour donner une vitesse v à une particule initialement au repos. Nous allons faire l'hypothèse que la force peut toujours s'écrire comme le taux de variation de l'impulsion

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v} \quad (4.37)$$

Alors on a

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} m_0 \mathbf{v} + \gamma m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (4.38)$$

et

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \right) = \frac{\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}}{(1 - v^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.39)$$

Pour une force $\mathbf{F} = F \mathbf{e}_x$, qui accélère une particule dans la direction des x , le travail est donné

par

$$\begin{aligned}
 W &= \int F dx = \int \frac{d}{dt} (\gamma m_0 v) dx \\
 &= \int \left[\frac{m_0 v^2}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt} + \frac{m_0}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{dv}{dt} \right] v dt \\
 &= \int \left[\frac{m_0 v}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt} (v^2 + (1-v^2)) \right] dt \\
 &= \int \frac{m_0 v}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt} dt = \int \frac{m_0 v}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}} dv \\
 &= \frac{m_0}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{v_1}^{v_2} = \left(\frac{m_0}{(1-v_2^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{m_0}{(1-v_1^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
 &= (\gamma_2 - \gamma_1) m_0 = \Delta T.
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 &= \frac{1}{(1-v_2^2)^{\frac{1}{2}}} \\
 \gamma_1 &= \frac{1}{(1-v_1^2)^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

ce qui confirme que le travail s'est bien transformé en énergie cinétique. L'énergie cinétique d'une particule correspond au travail effectué pour la faire passer du repos à sa vitesse soit

$$W = (\gamma - 1) m_0 = T$$

Ce résultat nous confirme que $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ demeure valide avec $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$.

4.5 Transformations de Lorentz de l'énergie-impulsion

Rappelons qu'en terme d'un élément de temps propre $d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$, on a

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v} = \gamma m_0 \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m_0 \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \quad (4.40)$$

et

$$E = \gamma m_0 = m_0 \frac{dt}{d\tau} \quad (4.41)$$

où m_0 est la masse propre (ou la masse au repos). Puisque m_0 et τ sont des invariants de Lorentz, on a que

$$E, p_x, p_y, p_z \text{ se transforment comme } t, x, y, z \quad (4.42)$$

Par exemple

$$\begin{aligned}
 p_x &= m_0 \frac{dx}{d\tau} \\
 &\Downarrow \\
 p'_x &= m_0 \frac{dx'}{d\tau} \\
 &= m_0 \frac{d}{d\tau} \gamma (x - Vt) \\
 &= \gamma \left(\left(m_0 \frac{dx}{d\tau} \right) - V \left(m_0 \frac{dt}{d\tau} \right) \right) \\
 &= \gamma (p_x - VE)
 \end{aligned}$$

De la même façon

$$\begin{aligned}
 E &= m_0 \frac{dt}{d\tau} \\
 &\Downarrow \\
 E' &= m_0 \frac{dt'}{d\tau} \\
 &= m_0 \frac{d}{d\tau} \gamma(t - Vx) \\
 &= \gamma \left(\left(m_0 \frac{dt}{d\tau} \right) - V \left(m_0 \frac{dx}{d\tau} \right) \right) \\
 &= \gamma(E - Vp_x)
 \end{aligned}$$

Il en est de même pour y et z ,

$$\begin{aligned}
 t' &= \gamma(t - Vx) & E' &= \gamma(E - Vp_x) \\
 x' &= \gamma(x - Vt) & p'_x &= \gamma(p_x - VE) \\
 y' &= y & p'_y &= p_y \\
 z' &= z & p'_z &= p_z
 \end{aligned} \quad (4.43)$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V & 0 & 0 \\ -\gamma V & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

ou dans le formalisme quadrivectoriel

$$p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu}. \quad (4.45)$$

Remarque 4.2

i Le facteur γ qui est explicite ici est le γ de la transformation de Lorentz, c'est-à-dire $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$. Il ne faut pas confondre avec celui qui apparaît dans $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$ et $E = \gamma m_0 c^2$ c'est-à-dire $\gamma = (1 - \mathbf{v}^2)^{-\frac{1}{2}}$! **i**

Ceci dit, on voit aisément que les définitions

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} &= \gamma m_0 \mathbf{v} \\
 E &= \gamma m_0 c^2
 \end{aligned}$$

avec $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ où \mathbf{v} est la vitesse de l'objet dans le référentiel auraient pu être obtenues avec les transformations de Lorentz ci-haut. En effet, pour un objet qui a une vitesse $\mathbf{v} = V \mathbf{e}_x$ dans S , c'est-à-dire est au repos dans S' , on peut écrire

$$(E', p'_x, p'_y, p'_z) = (m_0 c^2, 0, 0, 0)$$

alors dans S

$$\begin{aligned}
 p_x &= \gamma(p'_x + vE') = \gamma m_0 v \\
 p_y &= p'_y = 0 \\
 p_z &= p'_z = 0 \\
 E &= \gamma(E' + v p'_x) = \gamma m_0 c^2
 \end{aligned}$$

où $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ est évalué avec $V = v$ ici.

On note par ailleurs qu'on peut déduire la vitesse d'une particule de sa quantité de mouvement \mathbf{p} et son énergie E :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{\mathbf{p}}{m_0} \right) \frac{m_0}{E} = \frac{\mathbf{p}}{E} \quad (4.46)$$

$$\mathbf{p} = E\mathbf{v} \quad (4.47)$$

alors qu'une relation analogue dans le cas non relativiste s'écrit

$$v = 2 \frac{\frac{1}{2}m_0v^2}{m_0v} = \frac{2T}{p}$$

Pour un photon, particule de masse nulle, on a

$$\mathbf{p} = E\mathbf{e}_p. \quad (4.48)$$

puisque sa vitesse est $c = 1$

Transformation de Lorentz : cas général

Si la vitesse relative entre S et S' est dans une direction arbitraire désignée par le vecteur unitaire \mathbf{e}_n

$$\mathbf{V} = V\mathbf{e}_n$$

les transformations de Lorentz prennent la même forme générale que pour la position d'espace-temps \mathbf{r} et t (eq. 3.16) soient :

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - V\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{p}) \\ &= E \cosh \alpha - \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{p} \sinh \alpha \\ \mathbf{p}' &= \mathbf{p} + (\gamma - 1)(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{p})\mathbf{e}_n - \gamma V E \mathbf{e}_n \\ &= \mathbf{p} + \mathbf{e}_n (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{p} (\cosh \alpha - 1) - E \sinh \alpha) \end{aligned}$$

où $\tanh \alpha = V$, $\cosh \alpha = \gamma$, $\sinh \alpha = \gamma V$.

Exemple 4.2

⚠ La vitesse d'un proton est portée à $\mathbf{v} = 0.99\mathbf{e}_x$ dans le repère de la cible. Calculez l'impulsion, l'énergie et l'énergie cinétique d'un proton ($m_p = 0.938 \text{ GeV}$) pour un observateur dans le repère S' se déplaçant à la vitesse $\mathbf{V} = 0.8\mathbf{e}_x$ par rapport au repère de la cible. ⚠

Tout d'abord reprenons les résultats de la page 65 pour les quantités dans le repère de la cible :

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma m |\mathbf{v}| = 6.58 \text{ GeV} \\ E &= \gamma m = 6.64 \text{ GeV} \\ T &= E - m = 5.70 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

où ici $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Approche 1 :

Désignons par γ_V le facteur relativiste correspondant à la vitesse relative entre le repère de la cible et S' . Utilisant les transformations de Lorentz, on obtient :

$$\gamma_V = (1 - V^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma_V(p_x - VE) = \frac{5}{3}(p_x - 0.8E) = 2.11 \text{ GeV} \\ E' &= \gamma_V(E - Vp_x) = \frac{5}{3}(E - 0.8p_x) = 2.29 \text{ GeV} \\ T' &= E' - m = 1.35 \text{ GeV} \end{aligned}$$

Approche 2 :

On pourrait procéder autrement et utiliser la transformation de Lorentz pour la vitesse pour obtenir les quantités recherchées : Avec $\mathbf{v} = 0.99\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{V} = 0.8\mathbf{e}_x$

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V} = \frac{(0.99) - (0.8)}{1 - (0.99)(0.8)} = 0.913$$

et alors on a

$$\gamma' = (1 - v'^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - (0.913)^2)^{-\frac{1}{2}} = 2.46$$

d'où on obtient

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}'| &= \gamma' m |\mathbf{v}'| = 2.11 \text{ GeV} \\ E' &= \gamma' m = 2.29 \text{ GeV} \\ T' &= (\gamma' - 1) m = 1.35 \text{ GeV} \end{aligned}$$

Note :

Dans le repère du proton, qu'on appellera ici S'' tel que $\mathbf{V} = \mathbf{v} = 0.99\mathbf{e}_x$, on obtient :

$$\gamma_V = \gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} p''_x &= \gamma_V (p_x - VE) = \gamma (p_x - vE) = \gamma((\gamma m_0 v) - v(\gamma m_0)) = 0 \text{ GeV} \\ E'' &= \gamma_V (E - V p_x) = \gamma((\gamma m_0) - v(\gamma m_0 v)) = m_0 = 0.938 \text{ GeV} \\ T'' &= E'' - m = 0 \text{ GeV} \end{aligned}$$

Autrement dit, le proton a une impulsion et une énergie cinétique nulles dans S'' comme on est en droit de s'attendre pour une particule au repos.

4.6 Exemple : collision inélastique

On considère la collision de deux particules identiques qui restent collées :

- dans le repère de centre de masse : $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 = 0$ et,
- dans un repère S' arbitraire : $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}'_3$.

Ces deux équations doivent être reliées par la transformation de Lorentz reliant le repère S' au repère S du centre de masse. Si la vitesse de S' par rapport à S est $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$, la composante x de la deuxième équation s'écrit :

$$\begin{aligned} p'_{1x} + p'_{2x} &= p'_{3x} \\ \gamma(p_{1x} - VE_1) + \gamma(p_{2x} - VE_2) &= \gamma(p_{3x} - VE_3) \end{aligned}$$

donc

$$\gamma(p_{1x} + p_{2x}) - \gamma V (E_1 + E_2) = \gamma p_{3x} - \gamma V E_3$$

Regroupant ces termes, on obtient

$$\gamma(p_{1x} + p_{2x} - p_{3x}) = \gamma V (E_1 + E_2 - E_3)$$

Mais dans le repère de centre de masse

$$p_{1x} + p_{2x} - p_{3x} = 0$$

alors

$$E_1 + E_2 - E_3 = 0$$

donc il y a conservation de l'énergie relativiste. Puisque les particules initiales sont identiques, on a d'une part $E_1 + E_2 = 2\gamma m_0$ et d'autre part : $E_3 = m_{03}$ alors

$$m_{03} = 2\gamma m_0 \geq 2m_0 \quad !!!!!$$

Remarque 4.3

i Attention : La masse propre d'une particule ou d'un objet correspond à sa masse telle que mesurée au repos et à l'état libre (soumise à aucune interaction). Par contre, pour la masse d'un système de particules ou d'un objet qui est soumis à des interactions est identifiée à la différence entre son énergie totale et son énergie cinétique totale :

$$m_{0\text{totale}} = E_{\text{totale}} - T_{\text{totale}},$$

où E_{totale} inclus l'énergie associée aux interactions (ex. énergie potentielle). **i**

La masse (au repos) de la particule résultante est plus grande que la somme des masses initiales. La différence de masse au repos est

$$m_{03} - 2m_0 = 2\gamma m_0 - 2m_0 = (\gamma - 1) \cdot 2m_0$$

c'est-à-dire l'énergie cinétique initiale. On en conclut qu'une énergie cinétique initiale équivalant à $(m_{03} - 2m_0)$ est convertie en masse additionnelle de la particule résultante.

Ceci est manifeste dans le cas non relativiste où $\beta = v \ll 1$:

$$\begin{aligned} m_{03} &= 2m_0 (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} \simeq 2m_0 \left(1 + \frac{1}{2}v^2 + \dots \right) \\ &\simeq 2 \left(m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\Delta m_0 = m_{03} - 2m_0 = 2T \implies 2T = \Delta m_0.$$

Cette possibilité de transformer de l'énergie en masse est la manifestation la plus célèbre de la relativité.

$$\left(\begin{array}{c} \text{perte ou gain net} \\ \text{de masse au repos} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{gain ou perte net} \\ \text{d'énergie cinétique} \end{array} \right). \quad (4.50)$$

Ainsi, par exemple,

$$\left(\begin{array}{c} \text{masse d'un ressort} \\ \text{compressé} \end{array} \right) > \left(\begin{array}{c} \text{masse d'un ressort} \\ \text{non-compressé} \end{array} \right) \quad (4.51)$$

$$\Delta m_0 = \text{travail de compression}. \quad (4.52)$$

Dans le cas général, on montre que la quantité de mouvement peut être conservée seulement si

$$\sum_i \gamma_i m_{0i} = \sum_i E_i \quad (4.53)$$

est conservé, avant et après la réaction (si un photon ($m_0 \gamma = 0$) est impliqué, cette forme doit être modifiée).

4.7 Exemples quantitatifs**Exemple 4.3**

i Considérons deux masses de 1 kg ($1 \text{ MeV} = 1.7827 \times 10^{-30} \text{ kg}$ ou $1 \text{ kg} = 5.6095 \times 10^{29} \text{ MeV}$) qui restent collées après la collision. Quel est le changement de masse du système ?

On peut écrire dans le centre de masse :

$$\Delta m_0 = 2T = 2(\gamma - 1)m_0 \simeq 2 \left(\frac{m_0 v^2}{2} \right) = m_0 v^2 \quad (4.54)$$

4. Dynamique relativiste

si $v \ll c = 1$. Pour

$$\begin{aligned} v &= |\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = 1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 3600 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \\ &= 0.333 \times 10^{-5} \ll c = 1, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \Delta m_0 &\simeq 6.2203 \times 10^{18} \text{ MeV} \\ &\simeq 1.1089 \times 10^{-11} \text{ kg.} \end{aligned}$$



Exemple 4.4

Quel est le changement de masse lorsque'on forme l'atome d'hydrogène ?

On a

$$m_{0H} < m_{0p} + m_{0e} \tag{4.55}$$

et la différence de masse correspond à l'énergie de liaison

$$\Delta m_0 = 13.6 \text{ eV} = 1.36 \times 10^{-8} \text{ GeV.} \tag{4.56}$$

L'énergie de liaison représente donc 1 partie dans 10^8 de l'énergie de l'hydrogène $E = m_{0H}$ ($= 0.9388 \text{ GeV}$)..

Exemple 4.5

Quel est le changement de masse lorsque'on forme le deutéron, un noyau formé d'un proton et d'un neutron ?

Les masses du proton, du neutron et du deutéron sont

$$\begin{aligned} m_{0p} &= 938.272 \text{ MeV} \\ m_{0n} &= 939.566 \text{ MeV} \\ m_{0d} &= 1875.613 \text{ MeV} \end{aligned}$$

d'où

$$\Delta m_0 = m_{0p} + m_{0n} - m_{0d} = 2.225 \text{ MeV.}$$

C'est exactement l'énergie requise pour le briser ou l'énergie de liaison.

Exercice 4.1

Vérifier à l'aide d'une transformation de Lorentz que si $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$ et $E = \gamma m_0 c^2$ dans S on a $\mathbf{p}' = \gamma' m_0 \mathbf{v}'$ et $E' = \gamma' m_0 c^2$ dans S' en mouvement uniforme par rapport à S .

4.8 Particules de masse nulle

Dans le cas d'une particule de masse nulle ($\gamma =$ photon, $\mathbf{v} =$ neutrinos,...), certaines relations ont une forme spéciale, c'est-à-dire

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2 \implies E = |\mathbf{p}|$$

pour $m_0 = 0$. Alors,

$$\frac{\mathbf{p}}{E} = \frac{\gamma m_0 \mathbf{v}}{\gamma m_0 c} = \mathbf{v} \implies v = c.$$

Les particules de masse nulle se déplacent donc toutes à la vitesse de la lumière. Elle possède donc une impulsion malgré leur masse nulle !

De plus, pour un photon, l'énergie et l'impulsion sont reliées à sa fréquence ν (ou sa longueur d'onde λ) :

$$E = h\nu$$

et

$$|\mathbf{p}| = h\nu = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad ; \quad \text{où } c = 1.$$

où h est la constante de Planck.

4.9 Effet Doppler-nouvelle approche

L'effet Doppler (cas longitudinal) peut être abordé maintenant pour des cas relativistes. Pour un photon de fréquence ν se déplaçant dans la direction des x

$$E = p_x = h\nu$$

On peut obtenir l'énergie du photon dans un repère S' , en utilisant les transformations de Lorentz

$$E' = \gamma(E - Vp_x), \quad (4.57)$$

On en déduit que la fréquence est modifiée par un facteur relativiste

$$h\nu' = \gamma(h\nu - Vh\nu) = h\nu\gamma(1 - V) \quad (4.58)$$

c'est-à-dire

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{(1 - V)}{(1 + V)}}. \quad (4.59)$$

Ce résultat concorde avec celui obtenu précédemment.

4.10 Pression de radiation

Considérons un grand nombre N de photons dans un cube de côté L . La force moyenne exercée sur les parois est

$$F = \left(\begin{array}{c} \text{Nombre de collisions} \\ \text{par unité de temps} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{Changement } \mathbf{p} \\ \text{par collision} \end{array} \right). \quad (4.60)$$

Supposons qu'en moyenne $\frac{N}{3}$ photons se déplacent le long de chacune des trois directions perpendiculaires aux parois et qu'un photon parcourt $2L$ (aller-retour) entre chaque collision. Le délai entre chaque collision est donc

$$T = \frac{2L}{c} = 2L$$

Autrement dit la fréquence de collision d'un photon est de

$$\nu_{\text{col}} = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L}.$$

Rappelant qu'en étant réfléchi en direction opposée, chaque photon transmet une quantité de mouvement de $2E = 2|\mathbf{p}|$ et la force exercée sur la paroi par $\frac{N}{3}$ photons est donnée par

$$F = \frac{N}{3} \left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right) = \frac{N}{3} \frac{2E}{2L} = \frac{NE}{3L}.$$

Alors la pression sur la paroi du cube d'aire L^2 est donnée par

$$P = \frac{F}{L^2} = \left(\frac{N}{L^3} \right) \frac{E}{3} = \frac{\rho \gamma E}{3} \quad (4.61)$$



Figure 4.4 ▲ Radiomètre de Crookes: Même avec un vide parfait, il n'est pas assez sensible pour observer une rotation à l'oeil nu.

où $\frac{N}{L^3} = \rho_\gamma$, la densité de photons. Définissons la densité d'énergie totale radiante ρ_E

$$\rho_E = \rho_\gamma E$$

alors la force sur la paroi devient

$$F = \frac{NE}{3L} = \frac{1}{3}\rho_E L^2.$$

La pression de radiation peut alors s'écrire en terme de la densité d'énergie

$$P = \frac{F}{L^2} = \frac{\rho_E}{3}. \quad (4.62)$$

Remarque 4.4

i La pression de radiation est très faible, mais peut être détectée en dirigeant un faisceau lumineux une plaquette de métal réfléchissante en équilibre délicat dans un radiomètre de Nichols avec plaquettes réfléchissantes fixées à une balance à torsion (voir figure 4.5).

À ne pas confondre avec le radiomètre de Crookes, dont le mouvement caractéristique opposé à celui prédit par la pression de radiation est provoqué par le réchauffement de l'air près des plaques (voir figure 4.4). La force motrice due à la radiation est trop faible dans ce cas pour provoquer une rotation dans cet appareil même lorsque le vide est presque parfait

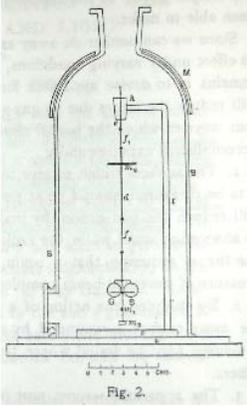


Figure 4.5 ▲ Radiomètre de Nichols: plus précis, il utilise une balance à torsion et tient compte des effets dynamiques. **4.11**

Transformation d'une force

Examinons comment une force est perçue par des observateurs dans des repères inertiels (même si cela suppose qu'il y a accélération). Contrairement aux composantes des vecteurs position et quantité de mouvement (**r** et **p**) d'une particule, les composantes d'une force **F** ne se transforment pas suivant une transformation de Lorentz, c'est-à-dire que la force n'est pas un vecteur de Lorentz (contravariant). En fait, la force n'est pas un concept relativiste naturel.

Pour illustrer cette affirmation, transformons l'équation du mouvement d'une particule dans un repère *S* :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_0 \frac{d}{dt} (\gamma \mathbf{v}) \quad (4.63)$$

au repère *S'* où la particule est instantanément au repos. À l'instant où dans *S* la vitesse de la particule est $+v\mathbf{e}_x$, on a

$$\Delta p_x = \gamma (\Delta p'_x + v \Delta E') = \gamma \Delta p'_x \quad (4.64)$$

car $\Delta E' = 0$.

En effet, dans le repère où la particule est au repos

$$E'^2 = m_0^2 + \mathbf{p}'^2 \implies 2E' \Delta E' = 2\mathbf{p}' \cdot \Delta \mathbf{p}' = 0$$

puisque $\mathbf{p}' = 0$ à l'instant considéré. Par contre, dans les autres directions,

$$\Delta p_y = \Delta p'_y \quad \text{et} \quad \Delta p_z = \Delta p'_z. \quad (4.65)$$

Dans *S'*, le délai $\Delta t'$ est un délai propre : $\Delta t' = \Delta \tau = \frac{1}{\gamma} \Delta t$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_x}{\Delta t} &= \frac{\gamma \Delta p'_x}{\gamma \Delta t'} = \frac{\Delta p'_x}{\Delta t'} \implies F_x = F'_x \\ \frac{\Delta p_y}{\Delta t} &= \frac{\Delta p'_y}{\gamma \Delta t'} \implies F_y = \frac{1}{\gamma} F'_y \\ \frac{\Delta p_z}{\Delta t} &= \frac{\Delta p'_z}{\gamma \Delta t'} \implies F_z = \frac{1}{\gamma} F'_z. \end{aligned} \quad (4.66)$$

4.12 Invariance de la charge électrique

L'équation du mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique ($q\mathbf{E} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$) est incomplète si on ne connaît pas la dépendance de la charge q sur la vitesse et l'accélération.

L'expérience montre que la charge électrique, comme la masse propre, est un invariant de Lorentz. Une évidence très simple de ce fait est que les atomes et les molécules non ionisées ne sont jamais déviées dans un champ électrique, quelle que soit leur vitesse. Alors pour des vitesses très différentes, les charges des électrons et des photons sont toujours égales (et opposées).

En fait, les transformations de Lorentz ont été construites de sorte à laisser les équations de Maxwell invariantes en supposant que la charge électrique ne varie pas suivant le repère.

4.13 Champ magnétique

Mentionnons qu'une analyse des équations de Maxwell dans le contexte de la relativité restreinte nous permet de constater que le champ magnétique est un effet relativiste.

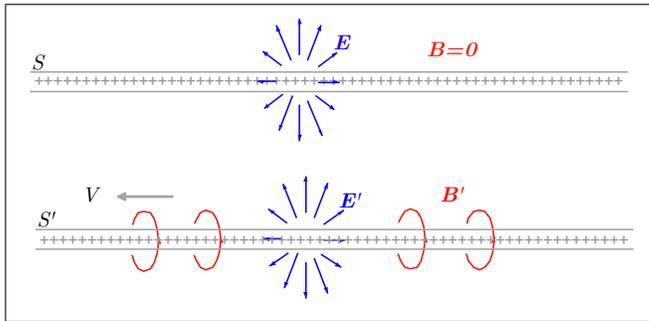


Figure 4.6 ◀▶
Champ magnétique dans une ligne chargée au repos et en mouvement.

Exemple 4.6

◆ Considérons un long fil placé le long de l'axe des x et chargé uniformément. Dans le système S où le fil est au repos, les champs électrique et magnétique

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E\mathbf{e}_\rho \neq 0 & \text{où } \mathbf{e}_\rho \perp \mathbf{e}_x \\ \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

Par ailleurs un observateur dans S' ayant une vitesse $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$, constate plutôt qu'un courant est produit dans la direction \mathbf{e}_x . Il observera donc

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= E'\mathbf{e}_\rho \neq 0 & \text{où } \mathbf{e}_\rho \perp \mathbf{e}_x \\ \mathbf{B}' &= B'\mathbf{e}_\theta \neq 0 & \text{où } \mathbf{e}_\theta \perp \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_\rho\end{aligned}$$

soit un champ magnétique que S n'observe pas. ◆

Considérons deux repères inertiels S et S' dont la vitesse relative est $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$. Nous énonçons ici les transformations de Lorentz pour les champs électrique et magnétique sans démonstration. Celles-ci s'écrivent

$$\begin{aligned}E'_1 &= E_1 & B'_1 &= B_1 \\ E'_2 &= \gamma(E_2 - VB_3) & B'_2 &= \gamma(B_2 - VE_3) \\ E'_3 &= \gamma(E_3 - VB_2) & B'_3 &= \gamma(B_3 - VE_2)\end{aligned}$$

Pour la ligne chargée dans l'exemple précédent, nous avons alors

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E\mathbf{e}_\rho = (0, E \sin \theta, E \cos \theta) \\ \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} E'_1 &= 0 & B'_1 &= 0 \\ E'_2 &= \gamma E \sin \theta & B'_2 &= -\gamma V E \sin \theta \\ E'_3 &= \gamma E \cos \theta & B'_3 &= -\gamma V E \cos \theta \end{aligned}$$

Si la vitesse relative entre S et S' est dans une direction arbitraire désignée par le vecteur unitaire \mathbf{e}_n

$$\mathbf{V} = V \mathbf{e}_n$$

les transformations de Lorentz pour les champs électrique et magnétique prennent la forme générale

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_n) \mathbf{e}_n + \gamma (\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E} \times \mathbf{e}_n) + V (\mathbf{e}_n \times \mathbf{B})) \\ \mathbf{B}' &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_n) \mathbf{e}_n + \gamma (\mathbf{e}_n \times (\mathbf{B} \times \mathbf{e}_n) - V (\mathbf{e}_n \times \mathbf{E})) \end{aligned}$$

où $\tanh \alpha = V$, $\cosh \alpha = \gamma$, $\sinh \alpha = \gamma V$. Donc une partie du champ électrique de S se transforme en champ magnétique S' .

Il est souvent plus pratique d'exprimer les champs électrique et magnétique en terme d'un tenseur de Lorentz antisymétrique, le tenseur électromagnétique

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

puisqu'il se transforme selon les transformations de Lorentz soit

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} F^{\mu\nu}.$$

Dans le repère S' , nous avons donc

$$F'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -\gamma(E^2 - VB^2) & -\gamma(E^3 - VB^3) \\ E^1 & 0 & -\gamma(B^3 - VE^3) & \gamma(B^2 - VE^2) \\ \gamma(E^2 - VB^2) & \gamma(B^3 - VE^3) & 0 & -B^1 \\ \gamma(E^3 - VB^3) & -\gamma(B^2 - VE^2) & B^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.14 Le test : les accélérateurs de particules

La relativité restreinte et ses conséquences sont testées tous les jours aux grands accélérateurs de particules à travers le monde. Les deux plus puissants actuellement en opération sont Fermilab situé à Batavia en banlieue de Chicago et le LEP II au CERN à Genève. Ils accélèrent respectivement des protons et antiprotons à une énergie cinétique de $0.9 \text{ TeV} = 0.9 \times 10^{12} \text{ eV}$ chacun et des électrons et positrons à $80.7 \text{ GeV} = 80.7 \times 10^9 \text{ eV}$ chacun (cela correspond au seuil de production de paires W^+W^- dont la masse est de $m_W = 80.4 \text{ GeV}$). Alors la vitesse des particules se trouve à partir de la relation

$$\gamma = \frac{E}{m_0} = 1 + \frac{T}{m_0}$$

d'où on tire la vitesse

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \\ &\simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2}. \end{aligned}$$

Par exemple, pour un proton ($m = 0.938 \text{ GeV}$) au LHC

$$T = 7000 \text{ GeV}$$

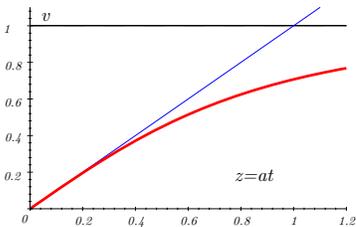


Figure 4.7 ▲ La dépendance de v en fonction de $z = \frac{q\mathcal{E}t}{M} = at$ (en bleu). On note que la vitesse c n'est approchée qu'asymptotiquement. La ligne droite représente le cas non relativiste (accélération constante).

$$\gamma = 1 + \frac{T}{m_0} = 7000/0.938 = 7463.7$$

À haute énergie, la vitesse est très près de c , s'en approchant de

$$\begin{aligned} c - v &= 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{(7463.7)^2}} \\ &= 8.98 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

La relation entre la vitesse et l'énergie totale peuvent donc être vérifié à 1 partie sur 10^7 et 1 partie sur 10^{10} respectivement.

Site (particules)	T	γ	$1 - v$
Fermilab ($p\bar{p}$)	0.9 TeV	920	5.92×10^{-7}
CERN-LHC (pp)	7 TeV	7463	8.98×10^{-9}
CERN-LEP II (e^+e^-)	80.7 GeV	1.58×10^5	2.00×10^{-11}

4.15 Exemples

4.15.1 Accélération dans un champ électrique constant

Exercice 4.2

Considérons le mouvement d'une particule chargée dans un champ $\mathbf{E} = \mathcal{E}\mathbf{e}_x$ uniforme et constant

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(p\mathbf{e}_x) = q\mathcal{E}\mathbf{e}_x \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}. \quad (4.67)$$

Pour $v(0) = 0$:

$$m_0 \frac{d}{dt}(\gamma v) = q\mathcal{E} \quad (4.68)$$

alors en intégrant

$$\gamma v = \frac{q\mathcal{E}t}{m_0} \quad (4.69)$$

où ici γ et v dépendent de t , c'est-à-dire $\gamma \equiv \gamma(t)$ et $v \equiv v(t)$. Posons

$$a = \frac{q\mathcal{E}}{m_0}$$

par souci de clarté. Ici nous utilisons $v(0) = 0$ à $t = 0$ et $v(t) = v$ après un temps t et donc

$$\frac{v^2}{1 - v^2} = (at)^2 \quad (4.70)$$

ce qui mène à

$$v^2 = \frac{(at)^2}{1 + (at)^2} \quad (4.71)$$

ou

$$v = \left[1 + \left(\frac{1}{at} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \gamma = \left[1 + (at)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.72)$$

(voir figure 4.7).



On peut pousser l'analyse plus loin. En effet, on note que :

Pour $t \ll \frac{m_0}{q\mathcal{E}} = \frac{1}{a}$:

$$v = \left[1 + \left(\frac{1}{at} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = at \left[1 + (at)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= at \left(1 - \frac{1}{2} (at)^2 + \dots \right) \simeq at$$

ce qui correspond à l'approximation non relativiste avec a , l'accélération.

Pour $t \gg \frac{m_0}{q\mathcal{E}} = \frac{1}{a}$:

$$v = \left[1 + \left(\frac{1}{at} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\simeq \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{at} \right)^2 + \dots \right) \simeq 1 \simeq c$$

$$E = \gamma m_0 \simeq (at) m_0 = m_0 at = q\mathcal{E}t$$

$$p = \gamma m_0 v \simeq \gamma m_0 c = m_0 at = q\mathcal{E}t = E$$

même si $v \leq c = 1$, E et p peuvent augmenter indéfiniment.

Le déplacement peut être évalué comme suit :

$$\int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{at' dt'}{\sqrt{1+s^2 t'^2}} \quad (4.73)$$

avec $a \equiv \frac{q\mathcal{E}}{m_0}$. Alors

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \frac{at' dt'}{\sqrt{1+s^2 t'^2}} = \left[\frac{1}{a} \sqrt{1+a^2 t'^2} \right]_0^t$$

$$= \frac{1}{a} \left[\sqrt{1+a^2 t^2} - 1 \right] \quad (4.74)$$

pour $x(0) = 0$ et $v(0) = 0$:

$$x(t) = \frac{1}{a} \left[\sqrt{1+(at)^2} - 1 \right] \quad (4.75)$$

Pour $t \ll \frac{m_0}{q\mathcal{E}} = \frac{1}{a}$:

$$x(t) \simeq \frac{1}{a} \left[1 + \frac{1}{2} (at)^2 - 1 \right] \simeq \frac{1}{2} at^2. \quad (4.76)$$

ce qui correspond au déplacement non relativiste pour une accélération constante, $a = \frac{q\mathcal{E}}{m_0}$.

Pour $t \gg \frac{m_0}{q\mathcal{E}} = \frac{1}{a}$:

$$x(t) \simeq \frac{1}{a} [at] = t. \quad (4.77)$$

et donc le déplacement s'effectue à une vitesse constante qui tend vers $c = 1$.

4.15.2 Déflexion par un champ électrique

Exercice 4.3

Considérons une particule chargée pénétrant perpendiculairement un champ électrique de la forme $\mathbf{E} = \mathcal{E} \mathbf{e}_y$ (voir figure 4.8). Tout comme dans l'exercice précédent, on aura

$$\dot{\mathbf{p}} = q\mathbf{E}$$

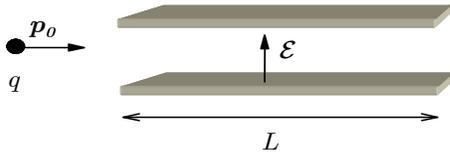


Figure 4.8 ▲ Particule chargée dans un champ électrique constant.

d'où on tire

$$\dot{p}_x = 0, \quad \dot{p}_y = q\mathcal{E} \quad (4.78)$$

$$p_x(0) = p_0, \quad p_y(0) = 0 \quad (4.79)$$

où nous utilisons la notation

$$\frac{d}{dt}X = \dot{X}.$$

En intégrant

$$\dot{p}_x = \frac{dp_x}{dt} = 0 \implies p_x = \text{cte} = p_0$$

$$\dot{p}_y = \frac{dp_y}{dt} = q\mathcal{E} \implies p_y = q\mathcal{E}t + \text{const.} = q\mathcal{E}t$$

ou

$$\mathbf{p}(t) = p_0\mathbf{e}_x + (q\mathcal{E}t)\mathbf{e}_y. \quad (4.80)$$



Alors

$$\begin{aligned} E^2(t) &= m_0^2 + \mathbf{p}^2(t) \\ &= m_0^2 + p_0^2 + (q\mathcal{E}t)^2 \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$= E_0^2 + (q\mathcal{E}t)^2 \quad (4.82)$$

où $E_0^2 = m_0^2 + p_0^2$ est l'énergie initiale. Puisque

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E} \quad (4.83)$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{p_x}{E} = \frac{p_0}{E} = \frac{p_0}{\sqrt{E_0^2 + (q\mathcal{E}t)^2}} \\ v_y &= \frac{p_y}{E} = \frac{q\mathcal{E}t}{E} = \frac{q\mathcal{E}t}{\sqrt{E_0^2 + (q\mathcal{E}t)^2}}. \end{aligned}$$

On remarque que $v_x(t)$ décroît dans le temps et que $v_y(t)$ est plus petit que sa valeur non relativiste $\frac{q\mathcal{E}t}{m_0}$. Ce résultat est nécessaire afin d'avoir $v_x^2 + v_y^2 \leq c^2 = 1$ en tout temps. On a

$$v_x^2 + v_y^2 = \frac{p_0^2 + (q\mathcal{E}t)^2}{E_0^2 + (q\mathcal{E}t)^2} = \frac{E^2 - m_0^2}{E^2}. \quad (4.84)$$

L'inclinaison de la trajectoire s'exprime comme le rapport suivant :

$$\tan[\theta(t)] = \frac{v_y}{v_x} = \frac{q\mathcal{E}t}{p_0} \quad (4.85)$$

ou

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{q\mathcal{E}t}{p_0}\right)$$

Le temps requis pour parcourir la distance L est déduit à partir de

$$\begin{aligned} L &= \int_0^L dx = \int_0^{t_L} v_x dt = \int_0^{t_L} \frac{p_0}{\sqrt{E_0^2 + (q\mathcal{E}t)^2}} dt \\ &= \frac{p_0}{q\mathcal{E}} \sinh^{-1}\left(\frac{q\mathcal{E}t_L}{E_0}\right) \end{aligned} \quad (4.86)$$

4. Dynamique relativiste

En inversant pour obtenir t_L on a

$$t_L = \frac{E_0}{q\mathcal{E}} \sinh\left(\frac{q\mathcal{E}L}{p_0}\right). \tag{4.87}$$

L'angle de déflexion à la sortie du champ (après avoir parcouru une distance L dans la direction des x), c'est-à-dire après un temps t_L , est donné par

$$\theta_L = \theta(t_L) = \arctan\left\{\frac{E_0}{p_0} \sinh\left(\frac{q\mathcal{E}L}{p_0}\right)\right\}. \tag{4.88}$$

4.15.3 Particule dans un champ magnétique

Exercice 4.4

⚡ Considérons une particule chargée pénétrant perpendiculairement un champ magnétique uniforme et constant \mathbf{B} . L'équation de mouvement d'une particule dans un champ magnétique est

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{4.89}$$

et donc la force exercée est perpendiculaire à la fois la vitesse et au champ magnétique. ⚡

De plus

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}^2) = 2\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 2\mathbf{p} \cdot q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$$

puisque

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathbf{v} \perp (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

comme dans le cas non relativiste. \mathbf{p}^2 est donc constant. Rappelons que

$$\mathbf{p}^2 = E^2 - m_0^2$$

reste valide en tout temps. Il en découle que :

1. E , $|\mathbf{p}|$, $|\mathbf{v}|$ et γ sont constants (puisque $\mathbf{p}^2 = E^2 - m_0^2$).
2. Puisque que $\frac{d\gamma}{dt} = 0$, on récrit

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{q}{\gamma m_0} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{q}{\gamma m_0} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

3. Cette équation admet la même solution que dans le cas non relativiste en remplaçant m_0 par γm_0 . Pour le démontrer, simplifions le problème en choisissant judicieusement le système de coordonnées en posant que $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, avec $v_z = 0$ (car $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$) et $z = 0$ alors

$$\dot{v}_x = \frac{qB}{\gamma m_0} v_y \quad \dot{v}_y = -\frac{qB}{\gamma m_0} v_x$$

et

$$\ddot{v}_x = -\left(\frac{qB}{\gamma m_0}\right)^2 v_x \quad \ddot{v}_y = -\left(\frac{qB}{\gamma m_0}\right)^2 v_y.$$

La solution est périodique

$$v_x = v \sin(\omega_c t) \quad v_y = v \cos(\omega_c t)$$

où $\omega_c = \frac{qB}{\gamma m_0}$ et en intégrant

$$\begin{aligned}x &= -\frac{v}{\omega_c} \cos(\omega_c t) + x_0 \\y &= \frac{v}{\omega_c} \sin(\omega_c t) + y_0.\end{aligned}$$

Ces dernières équations sont les équations d'un cercle de rayon (appelé rayon de courbure)

$$\rho = \frac{v}{\omega_c} = \frac{\gamma m_0 v}{qB} = \frac{p}{qB}.$$

centré au point (x_0, y_0) dans le plan $z = 0$, car

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2.$$

Comme $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ correspond à une accélération centripète (mouvement circulaire périodique dont la fréquence est ω_c^2), on peut alors écrire

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \omega_c^2 \mathbf{r}.$$

ou encore

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - \left(\frac{qB}{\gamma m_0}\right)^2 \mathbf{r} = 0.$$

En conséquence, le rayon de courbure d'une particule chargée dans un champ magnétique fournit une mesure directe de sa quantité de mouvement relativiste.

4.15.4 Seuil de réactions

Le seuil d'une réaction, est l'énergie cinétique minimale requise pour la production des particules finales. Dans le repère du centre de masse, elle correspond à l'énergie cinétique suffisante pour produire toutes les particules finales sont au repos.

Exercice 4.5

⚡ La production de paires

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^-$$

semble possible si $E_\gamma \geq 2m_{0e} \simeq 1.022 \text{ MeV}$.

Mais, dans le repère du centre de masse :

$$\mathbf{p}_\gamma \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_{e^+} + \mathbf{p}_{e^-} = 0 !!$$

Cette réaction est donc impossible. Par ailleurs, au voisinage d'un noyau, la réaction est possible puisqu'une partie de la quantité de mouvement y est transférée

$$\mathbf{p}_\gamma + \mathbf{p}_N = \mathbf{p}'_N + \mathbf{p}_{e^+} + \mathbf{p}_{e^-}$$

Le noyau agit donc comme « catalyseur ». L'énergie requise est alors

$$\begin{aligned}E_\gamma + E_N &= E'_N + m_{0e} + m_{0e} \\E_\gamma &= 2m_{0e} + \Delta E_N > 2m_{0e}\end{aligned}$$

Si le noyau est initialement au repos $\mathbf{p}_N = 0$, et sa masse est élevée par rapport à p'_N , on peut utiliser l'approximation non relativiste

$$\Delta E_N = \frac{p'^2_N}{2m_{0N}}.$$

On voit que le noyau absorbera la quantité de mouvement sans absorber trop d'énergie.

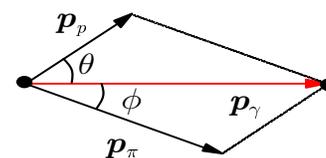


Figure 4.9 ▲
Photoproduction de pions.

Exercice 4.6

 Photoproduction de pions dans le repère de la cible (CF)
 Considérons la production de pions par collision de photons sur des protons (voir figure 4.9)

Avec le proton initial au repos :

$$\begin{aligned} \gamma + p &\rightarrow p + \pi^0 \\ &\rightarrow n + \pi^+ \end{aligned}$$



Constatons tout d'abord, qu'au seuil, les produits, le p et le π^0 sont au repos dans le repère du centre de masse. Leur vitesse dans ce repère est nulle. Leur vitesse dans ce repère est nulle. Si on se rapporte maintenant au repère de la cible on peut alors conclure que les produits $p + \pi^0$ ont avec la même vitesse finale v :

$$\begin{aligned} \text{conservation d'énergie :} & \quad h\nu_{CF} + m_0p = \gamma(m_0p + m_0\pi^0) \\ \text{conservation d'impulsion :} & \quad h\nu_{CF} = \gamma(m_0p + m_0\pi^0)v \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \gamma(m_0p + m_0\pi^0)v + m_0p &= \gamma(m_0p + m_0\pi^0) \\ 1 = \gamma(1 - v)(1 + \alpha) &\quad \text{où} \quad \alpha \equiv \frac{m_0\pi^0}{m_0p} = 0.14384 \end{aligned}$$

Alors

$$v = \frac{(1 + \alpha)^2 - 1}{(1 + \alpha)^2 + 1} \simeq 0.133588 \quad \text{et} \quad \gamma \simeq 1.009044$$

où $m_0\pi^0 = 134.96 \text{ MeV}$. Finalement, l'énergie du photon est obtenue par

$$h\nu_{CF} = \gamma m_0p (1 + \alpha)v$$

Exercice 4.7

 Photoproduction de pions dans le repère d'impulsion nulle (RIN) 

Le p et le π^0 dans le repère d'impulsion nulle (RIN) sont au repos :

$$\begin{aligned} \text{conservation d'énergie :} & \quad h\nu_{RIN} + \gamma m_0p = (m_0p + m_0\pi^0) \\ \text{conservation d'impulsion :} & \quad h\nu_{RIN} - \gamma m_0pv = 0 \end{aligned}$$

où $v = v_p =$ vitesse du proton initial dans le centre de masse. Alors

$$\begin{aligned} \gamma m_0pv + \gamma m_0p &= (m_0p + m_0\pi^0) \\ \gamma(v + 1) &= (1 + \alpha) \end{aligned}$$

et donc on a encore

$$v = \frac{(1 + \alpha)^2 - 1}{(1 + \alpha)^2 + 1} \simeq 0.133588 \quad \text{et} \quad \gamma \simeq 1.009044.$$

Cependant ici,

$$\begin{aligned} h\nu_{RIN} &= \gamma m_0pv \\ &= 0.134756m_0p = 126.476 \text{ MeV} \end{aligned}$$

alors que nous avons

$$h\nu_{CF} = \gamma m_0p (1 + \alpha)v.$$

Mais ces deux résultats doivent être compatibles avec la formule de Doppler. On vérifie

$$\frac{h\nu_{\text{RIN}}}{h\nu_{\text{CF}}} = \frac{\gamma m_0 v}{\gamma m_0 (1 + \alpha) v} = (1 + \alpha)^{-1} = \gamma(1 - v) = \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}}$$

soit

$$\begin{aligned} \nu_{\text{RIN}} &= \nu_{\text{CF}} \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}} \\ h\nu_{\text{CF}} &= \gamma m_0 (1 + \alpha) v \end{aligned}$$

Exercice 4.8

Photoproduction de pions par invariance de $E^2 - \mathbf{p}^2$ dans le repère de la cible (CF)



Par l'approche de l'invariance de $E^2 - \mathbf{p}^2$:
Dans le repère de la cible (CF), on a, au seuil :

$$\begin{aligned} E^2 - \mathbf{p}^2 &= (h\nu_{\text{CF}} + m_0)^2 - (h\nu_{\text{CF}})^2 \\ &= [\gamma(m_0 + m_0\pi^0)]^2 - [\gamma v(m_0 + m_0\pi^0)]^2 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 2h\nu_{\text{CF}}m_0 + m_0^2 &= (\gamma^2 - \gamma^2 v^2)(m_0 + m_0\pi^0)^2 \\ &= (m_0 + m_0\pi^0)^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h\nu_{\text{CF}} &= \frac{(m_0 + m_0\pi^0)^2 - m_0^2}{2m_0} \\ &= \left(m_0\pi^0 + \frac{m_0\pi^0}{2} \right) \\ &= \alpha \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) m_0 \simeq 0.154m_0 \\ &= \gamma m_0 (1 + \alpha) v \end{aligned}$$

Exercice 4.9

Photoproduction de pions par invariance de $E^2 - \mathbf{p}^2$ dans le repère d'impulsion nulle (RIN)



Par l'approche de l'invariance de $E^2 - \mathbf{p}^2$: Dans le repère d'impulsion nulle (RIN), on a, au seuil :

$$\begin{aligned} (E^2 - \mathbf{p}^2)_{\text{avant}} &= (E^2 - \mathbf{p}^2)_{\text{après}} \\ E_{\text{avant}} &= E_{\text{après}} \\ (h\nu_{\text{RIN}} + \gamma m_0) &= (m_0 + m_0\pi^0) \\ h\nu_{\text{RIN}} &= (m_0 + m_0\pi^0) - \gamma m_0 \\ h\nu_{\text{RIN}} &= m_0(1 - \gamma + \alpha) \end{aligned}$$

Mais

$$\gamma(v + 1) = (1 + \alpha)$$

alors

$$\begin{aligned} h\nu_{\text{RIN}} &= m_0(\gamma(v + 1) - \gamma) \\ &= \gamma m_0 v \end{aligned}$$

comme précédemment.

4.15.5 Vitesse du RIN d'un système relativiste

Exercice 4.10

⚠ La conservation de la quantité de mouvement limite la *matérialisation* de l'énergie cinétique, sauf dans le repère du centre de masse

$$\left(\sum_i \mathbf{p}_i \right)_{\text{initial}} = 0$$

où toute l'énergie cinétique initiale est matérialisable. La vitesse du centre de masse est

$$\mathbf{v}_{\text{RIN}} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\sum_i E_i} = \frac{\text{Q. de M. totale}}{\text{Énergie totale}}$$

pour $v_i \ll 1$ ($\gamma_i \simeq 1$) et pas de photon, cette définition se réduit à l'expression non relativiste :

$$\mathbf{v}_{\text{RIN}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i}$$



4.15.6 Énergie disponible

Exercice 4.11

⚠ Quelle est l'énergie disponible à l'excitation ou à la création de particules pour un proton entrant en collision avec un autre un proton au repos ? ⚠

Cas non relativiste : On a

$$T_{\text{CF}} = \frac{1}{2} m_{0p} v^2 \ll m_{0p} \simeq 938 \text{ MeV}$$

et

$$\begin{aligned} T_{\text{RIN}} &= \frac{1}{2} m_{0p} \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m_{0p} \left(\frac{v}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} m_{0p} v^2 = \frac{1}{2} T_{\text{CF}} \end{aligned}$$

Dans le centre de masse, toute l'énergie cinétique est disponible : un proton de $T_{\text{CF}} \simeq 10 \text{ MeV}$ peut créer 5 MeV de matière.

Cas relativiste :

$$\left[(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \right]_{\text{CF}} = \left[(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \right]_{\text{RIN}}$$

où $(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)_{\text{RIN}} = 0$, $(E_2)_{\text{CF}} = m_{0p}$, $(\mathbf{p}_2)_{\text{CF}} = 0$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \left[(E_1 + m_{0p})^2 - (\mathbf{p}_1)^2 \right]_{\text{CF}} &= (E_1 + E_2)_{\text{RIN}}^2 \\ \left[(E_1^2 + 2m_{0p}E_1 + m_{0p}^2) - (\mathbf{p}_1)^2 \right]_{\text{CF}} &= [E_{\text{total}}^2]_{\text{RIN}} \\ 2m_{0p}E_1 + 2m_{0p}^2 &= \\ 2m_{0p} [E_1 + m_{0p}]_{\text{CF}} &= \\ 2m_{0p} [E_{\text{total}}]_{\text{CF}} &= \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{[E_{\text{total}}^2]_{\text{RIN}}}{[E_{\text{total}}]_{\text{CF}}} = 2m_{0p}$$

Par exemple, on veut obtenir une énergie $[E_{\text{total}}]_{\text{RIN}} = 20 \text{ GeV}$ dans le centre de masse

($m_0p \simeq 1 \text{ GeV}$,). Le proton en mouvement vers la cible fixe doit avoir une énergie

$$[E_{\text{total}}]_{\text{CF}} = \frac{(20)^2}{2(1)} = 200 \text{ GeV}$$

dans le repère de la cible fixe.

Dans le cas du seuil de production d'antiproton : $pp \rightarrow ppp\bar{p}$

$$E_{\text{RIN}}|_{\text{seuil}} = 4m_0p$$

$$E_{\text{CF}}|_{\text{seuil}} = \frac{4^2}{2}m_0p = 8m_0p$$

et

$$T_{\text{CF}}|_{\text{seuil}} = (8-2)m_0p \simeq 5.63 \text{ GeV}.$$

4.15.7 Effet Compton

Exercice 4.12

⚠ L'effet Compton est observé dans la diffusion d'un photon par une particule chargée. Dans la plupart des cas, il s'agit d'une collision de rayons-X ($\lambda \simeq 10^{-8} \text{ cm}$) avec des électrons et peut être vu comme une manifestation de la nature corpusculaire de la lumière. La conservation de la quantité de mouvement nous donne (voir figure 4.10)

$$h\nu = h\nu' \cos \theta + \gamma m \cos \phi$$

$$0 = h\nu' \sin \theta - \gamma m \sin \phi$$

alors que la conservation de l'énergie requiert

$$m + h\nu = \gamma m + h\nu'.$$

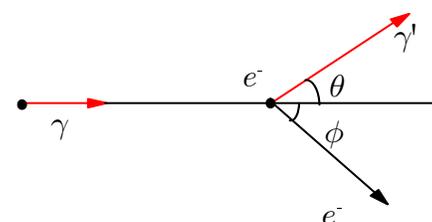


Figure 4.10 ▲
Effet Compton: Collision de rayons-X avec des électrons.

On cherche $\nu'(\theta)$ en éliminant ν et ϕ . En posant

$$\alpha = \frac{h\nu}{m} \quad \text{et} \quad \alpha' = \frac{h\nu'}{m}$$

on a

$$\alpha = \alpha' \cos \theta + \gamma \cos \phi \quad (4.90)$$

$$0 = \alpha' \sin \theta - \gamma \sin \phi \quad (4.91)$$

$$1 + \alpha = \gamma + \alpha' \quad (4.92)$$

Avec (4.90) et (4.91)

$$(\gamma \cos \phi)^2 + (\gamma \sin \phi)^2 = (\alpha - \alpha' \cos \theta)^2 + (\alpha' \sin \theta)^2$$

$$\gamma^2 \gamma^2 = \alpha^2 - 2\alpha\alpha' \cos \theta + \alpha'^2$$

$$\gamma^2 - 1 = \alpha^2 - 2\alpha\alpha' \cos \theta + \alpha'^2$$

Par ailleurs avec (4.92)

$$\gamma^2 = (1 + \alpha - \alpha')^2$$

alors

$$\gamma^2 - 1 = \alpha^2 - 2\alpha\alpha' \cos \theta + \alpha'^2$$

$$(1 + \alpha - \alpha')^2 - 1 = \alpha^2 - 2\alpha\alpha' \cos \theta + \alpha'^2$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\alpha' + 2\alpha + (\alpha')^2 - 2\alpha' = \alpha^2 - 2\alpha\alpha' \cos \theta + \alpha'^2$$

4. Dynamique relativiste

Simplifiant,

$$\alpha - \alpha' = \alpha \alpha' (1 - \cos \theta)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{v'} - \frac{1}{v} = \frac{h}{m} (1 - \cos \theta)$$

ou

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m} (1 - \cos \theta)$$

c'est-à-dire la variation de la longueur d'onde du rayon X, $\Delta\lambda$, dépend de son angle de diffusion. Ici, $\frac{h}{m} = \frac{h}{mc} =$ longueur de Compton.



- (a) Dans les deux cas, évaluez l'énergie totale des deux protons dans le repère d'impulsion nulle. Pourquoi choisir ce repère particulier ?
- (b) Dans le premier type d'expérience, à quelle énergie faudrait-il accélérer le premier proton de façon à avoir la même énergie disponible que dans la deuxième expérience avec des protons de 15 GeV ?

4.6 Rayons γ

Un faisceau de rayons γ est dirigé sur une cible de protons au repos. La réaction suivante se produit :



On observe que les pions π^+ qui émergent à 90° avec la direction des γ incidents, ont une énergie cinétique de 50 MeV. De leur côté, les neutrons sont émis à un angle θ par rapport à la direction des γ incidents. On donne : $m_\pi = 140 \text{ MeV}$, $m_p = m_n = 940 \text{ MeV}$.

- (a) Quelle est, en MeV, l'impulsion des π^+ ?
 - (b) Quelle est, en MeV, l'énergie des γ incidents ?
- 4.7 Le méson π^0
 Un pion π^0 , dont l'énergie cinétique est de 1 GeV, se désintègre pour donner deux γ . ($m_\pi = 135 \text{ MeV}$ au repos)
- (a) En supposant que ces γ sont émis en sens opposés mais dans la direction de mouvement du pion, quelle est l'énergie de chaque γ ?
 - (b) Se pourrait-il que cette désintégration ne donne qu'un seul γ ? Expliquer.

4.8 Le méson K

Un Kaon K ($m_K = 498 \text{ MeV}$) a une vitesse de 0.6. Il se désintègre pour donner deux pions ($m_\pi = 135 \text{ MeV}$). Quelle est l'impulsion et quelle est l'énergie de chaque π en supposant qu'ils sont émis dans la même direction que le Kaon incident ?

4.9 Le méson K revisité

Un méson K a une vitesse de $0.5c$ par rapport au repère du laboratoire (repère S). Dans un repère S' qui suit ce méson, on observe que ce dernier se transforme spontanément pour donner deux pions. Ces deux pions partent en sens opposés et parallèlement à l'axe Oy' dans S' .

- (a) Quelle est la grandeur de la vitesse de ces pions dans le laboratoire ?
 - (b) Quel est l'angle entre la direction des deux pions dans le laboratoire ?
- 4.10 Augmentation de l'impulsion
 Par quel facteur l'impulsion d'un objet change-t-elle si on double sa vitesse sachant que sa vitesse initiale est :
- (a) 10 m/s ?
 - (b) 10^4 m/s ?
 - (c) 10^8 m/s ?

4.11 Le proton et l'insecte

Parmi les rayons cosmiques les plus énergétiques, nous retrouvons des protons avec des énergies situées autour de 10^{20} eV . Déterminez l'impulsion d'un tel proton et comparez-la avec celle d'un insecte de 25 mg qui se déplace à 2 mm/s.

4.12 Désintégration d'un méson au repos

Un méson K au repos se désintègre pour donner un méson π^+ et un méson π^- ayant chacun la même vitesse de $0.85c$. Si le méson K se déplace à la vitesse de $0.9c$ par rapport au laboratoire lorsqu'il se désintègre,

- (a) quelle est la plus grande vitesse que peut avoir l'un des mésons π ?
 - (b) quelle est la plus petite vitesse que peut avoir l'un des mésons π ?
- 4.13 Dynamique relativiste versus classique
- (a) Quelle est l'énergie nécessaire pour accélérer un électron jusqu'à une vitesse de $0.4c$?
 - (b) Quelle est l'énergie nécessaire pour accélérer un électron jusqu'à une vitesse de $0.8c$?
 - (c) Quel est le rapport des énergies cinétiques $T(0.8c)/T(0.4c)$ selon la mécanique classique ? Comparez avec ce qui a été obtenu en (a) et (b).

4.14 Désintégration d'un Λ

Soit une particule Λ qui donne par désintégration un proton et un pion π^0 . On suppose que l'on puisse mesurer expérimentalement l'énergie E_π du pion.

- (a) Quelle est l'impulsion de ce pion ?
- (b) Quelle est la vitesse de ce pion ?
- (c) Quelle est l'énergie du pion en supposant que l'on connaisse la masse au repos m_Λ de la particule Λ ?

4.15 Collision élastique de protons

Un proton ayant une énergie cinétique de 437 MeV entre en collision élastique avec un proton au repos. Après la collision, les deux protons ont la même énergie.

- (a) Quel est l'angle entre les deux particules après la collision ?
- (b) Quel est l'angle entre les deux particules après la collision si le proton incident a une énergie de 33 GeV ?

4.16 Problème de masse

Une particule ayant une énergie totale égale à deux fois son énergie de masse frappe une particule semblable au repos. Le tout donne une troisième particule. Quelle est la masse au repos de cette troisième particule ?

4.17 Encore le méson π^0

Un pion dont la masse au repos est $273m_e$ (m_e étant la masse au repos de l'électron) se désintègre pour donner un muon (masse au repos de $207m_e$) et un neutrino.

- (a) Quelle est l'énergie cinétique du neutrino ?
- (b) Quelle est l'impulsion du neutrino ?

4.18 Vitesse d'un électron

Quelle est la vitesse d'un électron dont l'énergie cinétique est égale à son énergie au repos ?

4.19 Division spontanément

Montrez que si un corps de masse M au repos se divise spontanément en deux parties ayant des masses m_1 et m_2 et des vitesses v_1 et v_2 , alors : $M > m_1 + m_2$.

4.20 TNT

- (a) Calculez la quantité d'énergie libérée par l'explosion d'une bombe à fusion contenant 3 kg de matériel fissile (dans un tel processus, environ 0.1 de la masse est transformée en énergie.)
- (b) Quelle masse de TNT doit on faire exploser pour avoir une énergie équivalente ? (une mole de TNT (0.227 kg) donne 3430000 J)

4.21 Bremsstrahlung

Lorsqu'un électron en mouvement est décéléré, puis arrêté, les lois de conservations indiquent que son énergie cinétique doit se retrouver quelque part. Ce quelque part est un ou plusieurs photons qui sont émis par l'électron. On appelle ce phénomène, le bremsstrahlung (ou rayonnement de freinage).

- (a) Un électron avec une énergie cinétique de 20 keV émet 2 photons de bremsstrahlung lors de son arrêt en deux étapes. Le deuxième photon a une longueur d'onde 0.13 nm plus longue que le premier. Quel est l'énergie de l'électron après la première décélération ?
- (b) Quel sont les longueurs d'onde respectives des deux photons ?

4.22 Impulsion et énergie cinétique

Démontrez $P = \sqrt{2m_0T + T^2}$ (P est l'impulsion et T est l'énergie cinétique)

4.23 Rayons X

Quelle est la différence maximale possible de longueur d'onde d'une collision entre des rayons X et des protons ? (suggestion : voir l'exemple sur l'effet Compton).

4.24 Rayon γ

Un rayon γ d'énergie E_γ frappe un proton au repos. Trouvez la vitesse du centre de masse après la collision.

4.25 Réaction électron positron

Dans une certaine réaction électron positron, les deux particules sont au repos juste avant de se désintégrer pour donner deux photons. Quel est la longueur d'onde des photons ?

4.26 Énergie cinétique vs impulsion

Tracez un graphique de l'énergie cinétique en fonction de l'impulsion pour :

- (a) une particule ayant une masse.
- (b) une particule de masse nulle.

4.27 **Énergie disponible**

Un proton de masse m_p est accéléré dans un synchrotron à une énergie cinétique T . Ce proton frappe ensuite un deuxième proton qui est au repos. En supposant que la collision est parfaitement inélastique, trouver la formule qui représente l'énergie disponible après la collision pour créer une nouvelle particule.

4.28 **L'ozone**

L'ozone, O_3 , se crée lorsqu'une molécule d'oxygène (O_2) frappe un atome d'oxygène. Si une molécule d'oxygène ayant une vitesse de 600 m/s et un atome d'oxygène se déplaçant à 785 m/s se rencontre avec un angle de 33° , calculez la vitesse de la nouvelle molécule d'ozone.

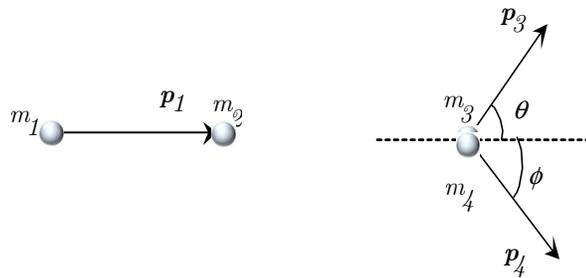
4.29 **TIE fighter**

Un "TIE fighter" (le petit chasseur impérial de Star Wars) se déplaçait à 30 m/s dans une direction fixe (axe z) avant de se faire détruire par un pilote de la rébellion.. Sa carcasse explose en trois morceaux. Deux pièces s'éloignent l'une de l'autre avec la même vitesse 25 m/s dans un plan (x, y) formant un angle de 27° . Une des deux pièces est trois fois plus massive que l'autre. Calculez les composantes de vitesse de la troisième pièce pour (a) l'axe des z et (b) le plan $x - y$. la troisième pièce est une fois et demi plus massive que la plus légère des pièces.

4.30 **Repères**

Dans le repère du laboratoire, une particule ($m_1, \mathbf{P}_{1lab}, E_{lab}$) frappe une deuxième particule qui est au repos (m_2) (voir figure 4.13). Dans la collision, les deux particules se transforment en deux autres particules.

Figure 4.13 ◀▶ Schéma de la situation décrite au problème 4.30



- (a) Dessiner cet événement dans le repère du centre de masse.
- (b) Trouver l'énergie totale du système et l'impulsion \mathbf{P}' dans le repère du centre de masse.
- (c) Trouvez la vitesse entre les deux repères

4.31 **Un gros ressort**

Un gros ressort servant d'amortisseur a une composante d'élasticité de $6 \times 10^7\text{ N/m}$. Quelle est l'augmentation de masse observée lorsqu'on le comprime de 15 cm ?

4.32 **Invariant de Lorentz**

Démontrez que la masse (c'est-à-dire $E^2 - p^2$) est un invariant de Lorentz.

4.33 **L'atome d'hydrogène**

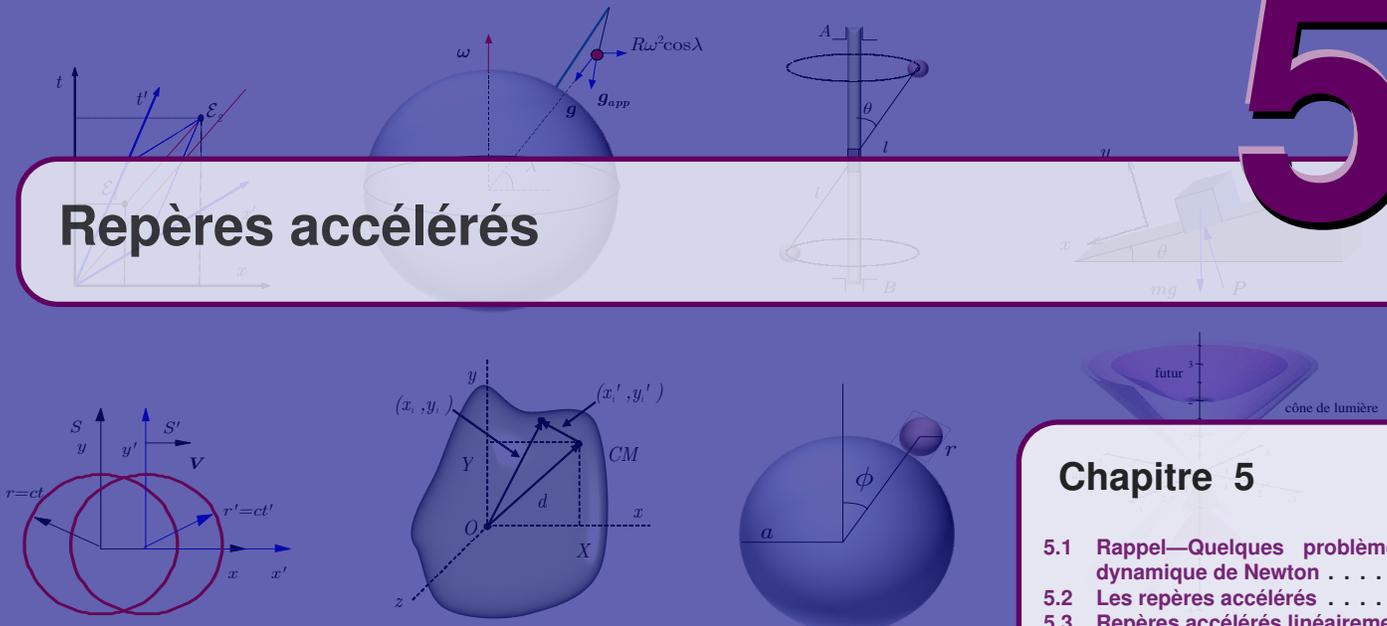
Pour l'atome d'hydrogène, selon le modèle de Bohr, l'électron se déplace autour du noyau à une vitesse v . Si on sait que l'erreur faite si on utilise la mécanique non relativiste pour trouver v est de 4×10^{-3} , quelle est la « véritable » vitesse de l'électron ?

4.34 **La particule Λ**

La particule Λ est un baryon neutre de masse M . Il a une durée de vie moyenne de $2.9 \times 10^{-10}\text{ s}$. Il se désintègre en un nucléon (m_1) et un méson π (m_2). Trouver une expression générale pour la masse M du Λ en fonction de quantités tel que $m_1, m_2, p_1, p_2, \dots$. Lorsque la particule se décompose, le méson et le nucléon forme un angle de θ entre eux.



Repères accélérés



Chapitre 5

- 5.1 Rappel—Quelques problèmes en dynamique de Newton 91
- 5.2 Les repères accélérés 93
- 5.3 Repères accélérés linéairement 94
- 5.4 Repères en rotation : introduction 95
- 5.5 Repères en rotation (cas général) 102
- 5.6 Mouvements observés de la surface de la Terre 106
- 5.7 Exercices 114

NOUS COMMENÇONS par un rappel de la mécanique newtonienne. Ceci nous permettra de mettre en perspective les sujets abordés dans ces notes de cours et surtout comment ils se distinguent par rapport à la mécanique newtonienne non relativiste pour une particule ponctuelle dans un repère inertiel.

5.1 Rappel—Quelques problèmes en dynamique de Newton

5.1.1 La deuxième loi de Newton

Remarque 5.1

i Notation : Afin d'alléger la discussion, les repères seront dénotées comme suit

Repère inertiel : S
Repère accéléré : S'

De la même façon, les variables dynamiques mesurées dans S et S' , seront nommées $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \dots$ et $\mathbf{r}', \mathbf{v}', \mathbf{a}', \dots$ respectivement. **i**

Exemple 5.1

⚡ Un homme, debout sur une balance à ressort placée dans un ascenseur au repos, pèse 700 N. Que marque la balance si l'ascenseur monte avec une accélération de $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$? Pour l'observateur dans l'immeuble le poids sur la balance est (\mathbf{g} et \mathbf{a} sont en sens opposés et ici l'homme est au repos par rapport au repère de l'ascenseur donc $\mathbf{a} = \mathbf{A}$)

$$\text{Dans } S : \quad m\mathbf{a} = \mathbf{F}^{\text{res}} = m\mathbf{g} + \mathbf{P}$$

où $\mathbf{P} = m\mathbf{a} - m\mathbf{g}$ est la poussée exercée sur l'homme par le sol. Pour l'observateur de l'ascenseur (accélération \mathbf{A} par rapport à S), la force vers le bas est

$$\text{Dans } S' : \quad m\mathbf{a}' = \mathbf{F}^{\text{res}} - m\mathbf{A} = m\mathbf{g} + \mathbf{P} - m\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

et puisque $\mathbf{a}' = 0$,

$$\mathbf{P} = m(\mathbf{A} - \mathbf{g}).$$

Dans les deux cas, le module de \mathbf{P} est donné par

$$P = m(g + A) = mg \frac{(g + A)}{g} = 700 \text{ N} \cdot \frac{g + a}{g} = 840 \text{ N}$$

c'est-à-dire 840 N (comme valeur de $g \simeq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$). Lorsque la vitesse redevient constante, la balance marquera 700 N tout comme au repos. 

Lorsqu'une ou plusieurs forces s'appliquent sur un corps de masse m , le mouvement de ce dernier est déterminé par l'équation

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}^{\text{res}} \tag{5.1}$$

où \mathbf{F}^{res} est la force résultante, c'est-à-dire la somme vectorielle de toutes les forces appliquées sur ce corps. Il faut aussi connaître les conditions initiales.

Il est commode de décomposer cette équation sur des axes convenablement choisis, adaptés à la géométrie du problème. Ainsi, en supposant un bloc sur un plan incliné lisse (voir figure 5.1), on aura

$$\text{Axe des } x : \quad ma_x = mg \sin \theta$$

$$\text{Axe des } y : \quad ma_y = 0 = -mg \cos \theta + P$$

où P , la poussée du plan sur le bloc, n'est pas égale au poids du corps comme c'est le cas sur un plan horizontal.

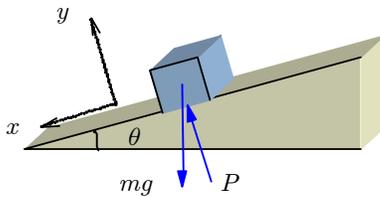


Figure 5.1 ▲ Glissement d'un bloc sur un plan incliné.

5.1.2 Le frottement sec

Si l'on pousse sur une lourde caisse placée sur un plancher horizontal rugueux, on se rend compte qu'on peut appliquer une force \mathbf{f} plus ou moins importante sans que la caisse ne bouge (voir figure 5.2). Puisqu'il n'y a pas mouvement, il y doit avoir équilibre des forces ce qui revient à dire que le plancher exerce sur la caisse une force de sens opposé à \mathbf{f} et de même grandeur : c'est ce qu'on appelle le frottement sans glissement. Cette force de frottement \mathbf{f}_f est une force ajustable.

Lorsque nous augmentons la force \mathbf{f} , nous constatons qu'à un moment donné commence le glissement. Appelons f_s la grandeur de la force, à cet instant. En première approximation, on peut considérer que f_s ne dépend que de la nature des surfaces en contact et de la force normale N exercée par le plancher sur la caisse. On a donc l'équation empirique (qui résulte de l'expérience) suivante

$$f_s = \mu_s N \tag{5.2}$$

où μ_s est appelé coefficient de frottement sans glissement (ou parfois coefficient de frottement statique). Ainsi, tant que la caisse ne bouge pas, la force de frottement a une grandeur inférieure ou égale à f_s .

Que se passe-t-il lorsque la caisse commence à glisser ? On observe qu'il y a toujours une force de frottement et que celle-ci est donnée par

$$f_g = \mu_g N. \tag{5.3}$$

On appelle f_g la force de frottement avec glissement tandis que μ_g est le coefficient de frottement avec glissement. Sans que cela soit une règle tout à fait générale, μ_g est plus petit que μ_s ou tout au plus égal. On sait quelle surprise cela réserve aux automobilistes lorsqu'ils bloquent les roues sur la glace plutôt que de réduire la vitesse pour empêcher de glisser : la force d'arrêt peut parfois être brusquement réduite par un facteur 2 ou 3, ce qui n'est pas négligeable.

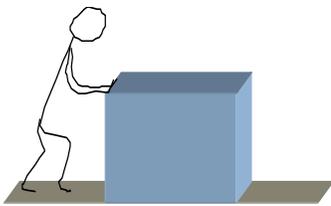


Figure 5.2 ▲ Le frottement sec.

5.1.3 Le mouvement circulaire

Comme son nom l'indique, le mouvement est celui d'un mobile dont la trajectoire est un cercle. Le rayon vecteur \mathbf{r} est de longueur égale au rayon du cercle R ; la vitesse change de direction, tout en demeurant *tangente* à la trajectoire. Si l'on utilise les coordonnées polaires, on repère la position du vecteur \mathbf{r} par l'angle θ . Posons une distance d parcourue sur le cercle alors l'angle θ balayant l'arc de cercle est

$$\theta = \frac{d}{R}$$

La vitesse angulaire est alors

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_T}{R}$$

ou encore

$$\mathbf{v}_T = \omega R \mathbf{e}_\theta.$$

où \mathbf{v}_T est la vitesse tangentielle et \mathbf{e}_θ est le vecteur unitaire dans la direction tangentielle à \mathbf{r} . Quand à l'accélération, elle est purement centripète si le mouvement est uniforme et de valeur

$$\mathbf{a}_r = -\frac{v^2}{R} \mathbf{e}_r = -\omega^2 R \mathbf{e}_r \quad (5.4)$$

où \mathbf{e}_r est le vecteur unitaire dans la direction de \mathbf{r} . S'il y a une accélération angulaire

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

on a en plus une accélération tangentielle

$$\mathbf{a}_T = \alpha R \mathbf{e}_\theta. \quad (5.5)$$

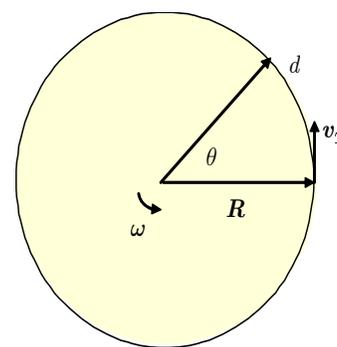


Figure 5.3 ▲
Le mouvement circulaire.

5.2 Les repères accélérés

Nous avons parlé précédemment des repères inertiels comme étant ceux dans lesquels s'appliquent les lois de Newton. Nous avons vu aussi que si l'on connaît un repère inertiel, tout autre repère ayant une vitesse constante par rapport au premier sera aussi inertiel. On peut se poser la question : qu'advient-il si ce repère est accéléré par rapport au premier ? Sommes-nous encore capables de décrire le mouvement en nous servant des équations de Newton ? Nous allons voir que si on se place dans un repère qui est accéléré par rapport à un repère inertiel, il nous faut introduire des *pseudo-forces* (appelées par certains *forces fictives* ou encore *forces inertielles*).

Malgré ces vocables qui peuvent porter à confusion, ces forces sont réelles mais elles ne peuvent être attribuées à une cause physique (par exemple à la gravité ou à l'effet du frottement ou d'un ressort). Elles n'apparaissent, en effet, que parce que le repère choisi pour décrire le mouvement n'est pas inertiel. Ce sont ces forces qui sont responsables des sensations fortes que nous éprouvons dans certains jeux d'un parc d'amusement comme les montagnes russes, par exemple. Ce sont aussi ces forces qui permettent d'interpréter certains phénomènes sur la Terre, qui est, ne l'oublions pas, un gros repère tournant ; parmi ces phénomènes, mentionnons le sens de rotation des tornades, la déviation de projectiles à longue portée ou la rotation du plan du pendule de Foucault.

Remarque 5.2

i Notation : Afin d'alléger la discussion, les repères seront dénotés comme suit

Repère inertiel :	S
Repère accéléré :	S'

De la même façon, les variables dynamiques mesurées dans S et S' , seront nommées $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a} \dots$ et $\mathbf{r}', \mathbf{v}', \mathbf{a}' \dots$ respectivement



5.3 Repères accélérés linéairement

Considérons l'exemple d'un pendule suspendu dans la caisse d'un camion. Nous assignerons le repère inertiel au repos S correspondant à la route, et le repère S' du camion subissant une accélération \mathbf{a} selon Ox . Supposons maintenant le pendule au repos (en équilibre) dans ce repère accéléré. Il adopte la configuration suivante (voir figure 5.4) qui résulte de l'accélération du camion, de la tension dans le fil \mathbf{T} et de la gravité \mathbf{g} . L'observateur du repère S , voyant le pendule soumis à une accélération \mathbf{a} , tire la conclusion que cet objet est soumis à une force résultante \mathbf{F}^{res} de grandeur ma . Pour une tension \mathbf{T} et un angle θ , les équations de mouvement se lisent

Selon l'horizontale
Selon la verticale

$$\begin{aligned} ma_x &= T \sin \theta \\ ma_y &= 0 = T \cos \theta - mg \end{aligned}$$

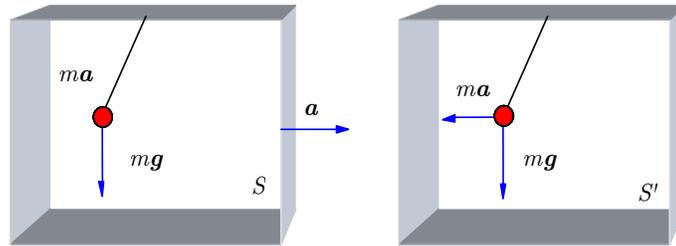


Figure 5.4 ◀▶
Exemple de repère accéléré linéairement.

D'autre part, l'observateur du repère S' , ne se posant pas de question à savoir si son repère est inertiel ou non et voyant qu'un objet est au repos dans son repère, conclut que ce dernier est en équilibre sous l'effet de trois forces :

1. la gravité (réelle ou physique) : mg ,
2. la tension dans le fil \mathbf{T} , qui annule la gravité et dont la composant horizontale exerce une force (réelle ou physique) vers l'avant de grandeur \mathbf{F}^{res} et
3. une force (fictive) vers l'arrière de grandeur $\mathbf{F}^{\text{fic}} = -m\mathbf{a}$.

Le bilan des force se lit donc

$$\begin{aligned} \text{Selon l'horizontale} & \quad ma'_x = 0 = T \sin \theta + \mathbf{F}^{\text{fic}} = T \sin \theta - ma_x \\ \text{Selon la verticale} & \quad ma'_y = 0 = T \cos \theta - mg \end{aligned}$$

Cet observateur se voit donc dans l'obligation d'introduire une force qui ne semble pas avoir de cause physique. Cette force fictive qui apparaît dans un repère accéléré linéairement est appelée *force de d'Alembert*.

On conclut de cette discussion que si on a dans un repère inertiel S , une force physique totale \mathbf{F}^{res} qui agit sur un objet de masse m

$$S : \quad m\mathbf{a} = \mathbf{F}^{\text{res}} = m\mathbf{g} + \mathbf{T}$$

alors que pour un observateur dans un repère S' ayant une accélération linéaire \mathbf{A} relative à S , la dynamique sera décrite par

$$S' : \quad m\mathbf{a}' = \mathbf{F}^{\text{res}} - m\mathbf{A} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} - m\mathbf{A}.$$

Le dernier terme de l'expression précédente est la *force de d'Alembert*.

$$\mathbf{F}^{\text{d'Alembert}} = -m\mathbf{A}$$

Exemple 5.2

◆ Un homme, debout sur une balance à ressort placée dans un ascenseur au repos, pèse 700 N. Que marque la balance si l'ascenseur monte avec une accélération de $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$? Pour l'observateur dans l'immeuble le poids sur la balance est (\mathbf{g} et \mathbf{a} sont en sens opposés et ici l'homme est au repos par rapport au repère de l'ascenseur donc $\mathbf{a} = \mathbf{A}$)

$$\text{Dans } S : \quad m\mathbf{a} = \mathbf{F}^{\text{res}} = m\mathbf{g} + \mathbf{P}$$

où $\mathbf{P} = m\mathbf{a} - m\mathbf{g}$ est la poussée exercée sur l'homme par le sol. Pour l'observateur de l'ascenseur (accélération \mathbf{A} par rapport à S), la force vers le bas est

$$\text{Dans } S' : \quad m\mathbf{a}' = \mathbf{F}^{\text{res}} - m\mathbf{A} = m\mathbf{g} + \mathbf{P} - m\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

et puisque $\mathbf{a}' = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{P} = m(\mathbf{A} - \mathbf{g}).$$

Dans les deux cas, le module de \mathbf{P} est donné par

$$P = m(g + A) = mg \frac{(g + A)}{g} = 700 \text{ N} \cdot \frac{g + a}{g} = 840 \text{ N}$$

c'est-à-dire 840 N (comme valeur de $g \simeq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$). Lorsque la vitesse redevient constante, la balance marquera 700 N tout comme au repos. ◆

5.4 Repères en rotation : introduction

Afin de découvrir les forces qui peuvent se manifester dans un repère en rotation, nous allons prendre le cas simple suivant : une plate-forme en rotation uniforme à vitesse angulaire ω . Cela pourrait être, par exemple, un carrousel de chevaux de bois... sans les chevaux (voir figure 5.5).

De façon générale, on représente la vitesse angulaire par un vecteur ω parallèle à l'axe de rotation (ou perpendiculaire au plan de rotation) et pointant dans le sens prescrit par la règle de la main droite. Par exemple, une feuille qui tourne dans le sens anti-horaire possède un vecteur de vitesse angulaire qui sort perpendiculairement de la feuille.

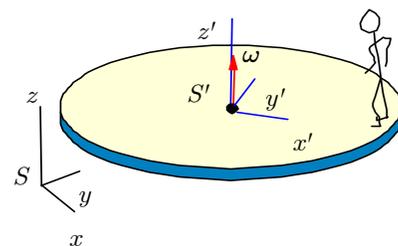


Figure 5.5 ▲
Plate-forme en rotation.

5.4.1 Objet au repos par rapport au disque

Imaginons une personne, que nous appellerons M. LeTourneur, au repos, debout sur le bord de cette plate-forme et analysons son attitude des points de vue d'un observateur au repos sur la Terre (observateur S) et d'un observateur S' dont le repère est fixé au carrousel. Disons tout de suite que les deux constatent que M. LeTourneur n'est pas selon la verticale mais penche plutôt vers l'axe de rotation du carrousel (voir figure 5.5).

Point de vue de S

Selon l'observateur S , M. LeTourneur est en mouvement circulaire uniforme. Il est donc nécessaire que s'exerce sur lui une force dirigée vers l'axe du carrousel : c'est une force centripète de grandeur

$$f = m\omega^2 R$$

où m est la masse de M. LeTourneur. Cette force ne peut venir que du frottement qui s'exerce entre les pieds de M. LeTourneur et la plate-forme, ce qui indique que le coefficient de frottement est suffisant pour empêcher M. LeTourneur de glisser hors du disque. M. LeTourneur penche vers l'axe de rotation du carrousel. Pourquoi ? En fait, c'est que M. LeTourneur doit être en équilibre de rotation autour de son centre de masse, c'est-à-dire que la somme des moments de force doit être nulle (voir figure 5.6). Alors les moments de force causés par la poussée du sol et la force de frottement s'annulent donc

$$Px - fy = 0 \quad (5.6)$$

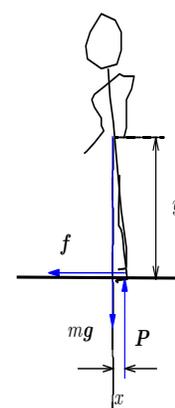


Figure 5.6 ▲
Diagramme des forces sur M. LeTourneur du point de vue d'un observateur dans S .

5. Repères accélérés

L'angle d'inclinaison θ est relié à la position du centre de masse par rapport à celle du point d'appui, c'est-à-dire les pieds de M. LeTourneux

$$\theta = \arctan \frac{x}{y} = \arctan \frac{f}{P} \tag{5.7}$$

et comme $f = m\omega^2 R$ et $P = mg$, on a

$$\theta = \arctan \frac{\omega^2 R}{g} \tag{5.8}$$

Exemple 5.3

Évaluons l'angle θ pour le cas suivant : Soit $\omega = 0.5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $R = 3 \text{ m}$, l'angle θ est

$$\theta = \arctan \frac{\omega^2 R}{g} \text{ soit } \theta \simeq 4.3^\circ$$

Le coefficient de frottement minimum requis μ_s est de

$$\mu_s = \frac{f}{mg} = \frac{\omega^2 R}{g} \simeq 0.075$$

ce qui est très inférieur aux coefficients entre des surfaces comme celles considérées.

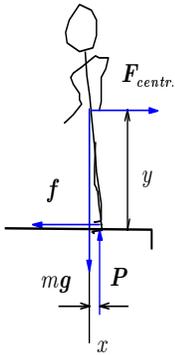


Figure 5.7 ▲ Diagramme des forces sur M. LeTourneux du point de vue d'un observateur dans S' .

Point de vue de S'

L'observateur de S' voit M. LeTourneux au repos, dans son repère. D'après la position penchée de M. LeTourneux, il conclut qu'il doit s'exercer sur son centre de masse une force vers l'extérieur (force centrifuge) qui l'oblige à se pencher vers l'intérieur pour être en équilibre de rotation. Il comprend, de même, que cette force vers l'extérieur est équilibrée par une force vers l'intérieur (le frottement). Donc, pour lui, selon l'horizontale, il existe deux forces : une force réelle (le frottement) et une pseudo-force, vers l'extérieur, la force centrifuge. Cette force centrifuge a comme grandeur :

$$F_{\text{centr.}} = m\omega^2 R$$

ce qui nous vient de la première partie de la discussion.

Exemple 5.4

Alors que son train roule en ligne droite sur un terrain plat à une vitesse de 150 km/h , un passager laissant pendre sa cravate à bout de bras, devant lui, s'aperçoit que celle-ci dévie subitement vers la droite, faisant un angle de 10° avec la verticale. Elle conserve cette position pendant 30 s puis revient à la verticale. Décrire quantitativement le mouvement du train pendant ces secondes.

À moins d'être malicieux envers celui qui pose une telle question, on peut difficilement imaginer autre chose que la situation suivante : le train effectue un mouvement circulaire vers la gauche, puisque c'est la force centrifuge qui tire la cravate vers la droite.

La figure 5.8 nous montre l'état des forces sur la cravate. L'équilibre de ces forces perpendiculairement à la cravate implique

$$mg \sin 10^\circ = \frac{mv^2}{R} \cos 10^\circ$$

où v est la vitesse tangentielle et R le rayon de courbure de la trajectoire. Ceci nous permet de déduire le rayon de courbure soit

$$\tan 10^\circ = \frac{mv^2/R}{mg} = \frac{v^2}{gR}$$

d'où

$$R = \frac{v^2}{g \tan 10^\circ} \simeq 1000 \text{ m}$$

De plus, pendant ces 30 secondes, le train a parcouru la distance

$$d = vt = \left(\frac{150 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{h}^{-1}}{3600 \text{ s} \cdot \text{h}^{-1}} \right) \cdot 30 \text{ s} = 1250 \text{ m}$$

soit, $d = 1250 \text{ m}$, ce qui signifie qu'il a tourné d'un angle d'environ

$$\phi = \frac{d}{R} = \frac{1250}{1000} \text{ rad} = 1.25 \text{ rad}$$

soit $\phi = 72^\circ$.

5.4.2 Objet en mouvement par rapport au disque

Imaginons maintenant que M. LeTourneur court à la périphérie de la plate-forme avec une vitesse constante v' (en grandeur) et ce, dans le sens de rotation de cette plate-forme.

Point de vue de S

Pour l'observateur sur Terre S , la trajectoire de M. LeTourneur est toujours circulaire mais sa vitesse est maintenant (voir figure 5.9)

$$v = (R\omega + v') \quad (5.9)$$

ce qui veut dire que M. LeTourneur a une accélération centripète de

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{R} \mathbf{e}_r = -\frac{(R\omega + v')^2}{R} \mathbf{e}_r. \quad (5.10)$$

La force de frottement f (force centripète) dans ce cas doit être plus grande

$$\mathbf{f} = -\frac{m(R\omega + v')^2}{R} \mathbf{e}_r$$

et l'angle θ' de M. LeTourneur avec la verticale doit être

$$\theta' = \arctan \frac{(R\omega + v')^2}{Rg}. \quad (5.11)$$

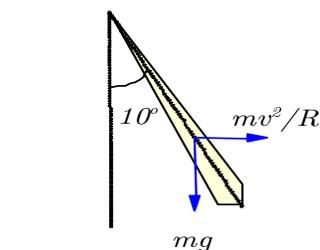
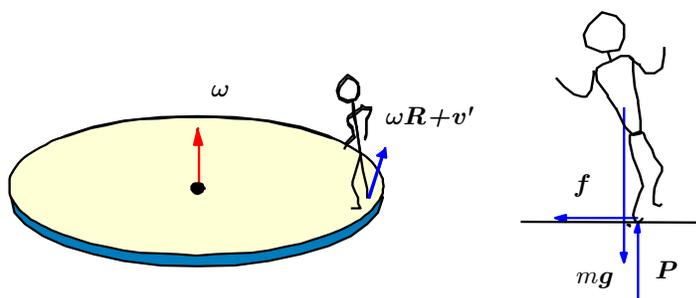


Figure 5.8 ▲ Position de la cravate du passager au virage du train.

Figure 5.9 ◀ Position de M. LeTourneur selon l'observateur au repos dans S .

Exemple 5.5

Supposons encore ici $\omega = 0.5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $R = 3 \text{ m}$, et une vitesse v' de $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On trouve alors

$$\theta' = \arctan \frac{(R\omega + v')^2}{Rg} = 12^\circ \quad (5.12)$$

et le coefficient de frottement minimum pour que M. LeTourneur puisse tenir est

$$\mu_s = \frac{f}{mg} = \frac{m(R\omega + v')^2}{mg} \simeq 0.21$$

ce qui est possible pour bien des surfaces.



Point de vue de S'

L'observateur S' voit M. LeTourneur en mouvement circulaire uniforme à vitesse constante v' et il sait qu'il faut pour cela une force centripète de

$$m\mathbf{a}' = -\frac{mv'^2}{R}\mathbf{e}_r \tag{5.13}$$

pour le retenir sur la plate-forme.

Voyant l'inclinaison de son centre de masse, il comprend qu'il s'exerce sur M. LeTourneur une force vers l'intérieur (voir figure 5.10) de

$$\mathbf{f} = -\frac{m(R\omega + v')^2}{R}\mathbf{e}_r \tag{5.14}$$

et que cette force est exercée par le frottement. Il en déduit donc que le frottement exerce une force plus grande que celle qui lui est nécessaire pour maintenir une trajectoire circulaire dans S' et que ce surplus qui se chiffre à

$$\Delta\mathbf{f} = \left(\frac{m(R\omega + v')^2}{R} - \frac{mv'^2}{R} \right) \mathbf{e}_r \tag{5.15}$$

ou encore

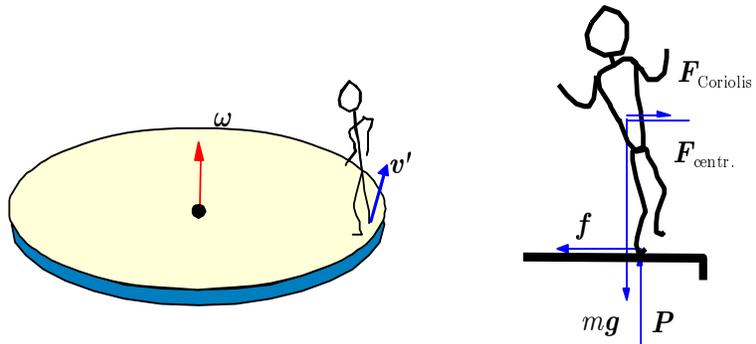
$$\Delta\mathbf{f} = \frac{m}{R} ((R\omega + v')^2 - v'^2) \mathbf{e}_r = (m\omega^2 R + 2m\omega v') \mathbf{e}_r \tag{5.16}$$

est nécessaire pour équilibrer deux forces qui tirent M. LeTourneur vers l'extérieur :

1. une *force centrifuge* : $\mathbf{F}_{\text{centr.}} = m\omega^2 R \mathbf{e}_r$
2. une force dite de *Coriolis* : $\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = 2mv' \omega \mathbf{e}_r$

Dans ce cas-ci, il y a donc, selon l'horizontale, une *force réelle* (le frottement qui agit vers l'intérieur) et deux *pseudo-forces* qui agissent vers l'extérieur : la force centrifuge comme dans le cas précédent où M. LeTourneur était au repos sur le bord du disque et une nouvelle force, la force de Coriolis, qui dépend du mouvement de M. LeTourneur *par rapport au repère tournant*.

Figure 5.10 ◀▶
Diagramme des forces sur M. LeTourneur en mouvement dans S' .



On pourrait montrer qu'il en serait de même aussi si M. LeTourneur se déplaçait à une vitesse v' le long d'un rayon, *vers l'extérieur par exemple* ; il y aurait encore une force centrifuge vers l'extérieur mais dans le cas de la force de Coriolis, elle agirait cette fois *perpendiculairement* à la vitesse et serait dirigée vers la droite par rapport à la direction de la vitesse. Nous allons voir d'ailleurs maintenant comment s'expriment, de façon générale, ces pseudo-forces.

Références 5.1

i Simulation en java sur le site web :
http://www.brainflux.org/Physics/Special_Relativity/Michelson_Morley/index.html
<http://subaru.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/optiphy/michelson.html>



Références 5.2

i Simulation en java sur le site web :
http://feynman.phy.ulaval.ca/marleau/marleau_parametric4D.html
<http://subaru.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/manege.html>



5.4.3 Analyse des accélérations : Mouvement dans une direction radiale

Nous allons analyser, de façon un peu plus systématique, comment apparaissent les accélérations auxquelles correspondent les pseudo-forces dont nous venons de parler.

On peut imaginer par exemple, que cet objet est une mouche qui se déplace sur une table tournante. Posons la vitesse dans le repère S'

$$\mathbf{v}' = v'_r \mathbf{e}_r + v'_\theta \mathbf{e}_\theta$$

et analysons partie par partie le mouvement de la mouche tel que vu par l'observateur dans S .

Accélérations par rapport à S

Supposons maintenant que la mouche se déplace dans S' à vitesse v' constante en grandeur le long d'une droite, en s'éloignant de l'axe (voir figure 5.11), c.-à-d. $v'_\theta = 0$ ou $v'_r = v'$ alors

$$\mathbf{v}' = v' \mathbf{e}_r$$

On peut imaginer par exemple, que cet objet est une mouche qui se déplace sur une table tournante.

Analysons son mouvement du point de vue de S , l'observateur inertiel. Nous allons voir qu'il y a deux types d'accélérations en jeu.

Accélérations qui dépendent du mouvement même du repère

En effet, pour cet observateur, il y a d'abord une accélération centripète qui apparaît du seul fait qu'il y a mouvement circulaire

$$\mathbf{a}_r = -\omega^2 r \mathbf{e}_r = -\frac{v_T^2}{r} \mathbf{e}_r$$

présent même si $v' = 0$.

De plus, pendant un court instant dt , le vecteur de vitesse radiale tourne d'un angle $d\theta = \omega dt$ (voir figure 5.11). Ce vecteur subit donc un changement dont l'amplitude est

$$dv' = v' d\theta = v' \omega dt .$$

Ce qui donne une accélération de grandeur $v' \omega$ et de direction perpendiculaire au déplacement et dans le sens de la rotation.

$$\mathbf{a}_{1\theta} = v' \omega \mathbf{e}_\theta$$

Accélération qui dépend du mouvement par rapport au repère S'

L'observateur de S constate que la mouche, en s'éloignant de l'axe, voit sa vitesse tangentielle changer ainsi

$$dv_T = \omega dr = \omega v' dt \quad (5.17)$$

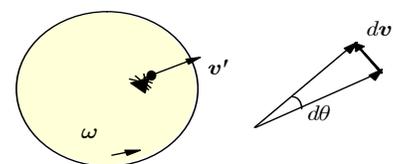


Figure 5.11 ▲ Mouvement dans la direction radiale.

d'où une accélération de grandeur $\omega v'$, perpendiculaire au rayon et dans le sens de la rotation.

$$\mathbf{a}_{2\theta} = v' \omega \mathbf{e}_\theta$$

Au total, l'observateur S voit donc une force de frottement agir sur la mouche

$$\mathbf{f} = m(-\omega^2 r \mathbf{e}_r + 2\omega v' \mathbf{e}_\theta)$$

dont les composante sont dues à :

1. une accélération centripète $\mathbf{a}_r = -\omega^2 r \mathbf{e}_r$
2. une accélération de grandeur $\mathbf{a}_{1\theta} + \mathbf{a}_{2\theta} = 2\omega v' \mathbf{e}_\theta$ dirigée vers la gauche par rapport au mouvement de la mouche.

Accélérations par rapport à S'

Comment l'observateur du repère tournant S' interprète-t-il cela ? L'objet qui se déplace est en mouvement rectiligne uniforme donc en principe pour S' , aucune force ne s'exerce sur la mouche.

$$m\mathbf{a}' = 0.$$

Il est toutefois en mesure de mesurer la force de frottement

$$\mathbf{f} = m(-\omega^2 r \mathbf{e}_r + 2\omega v' \mathbf{e}_\theta).$$

Tenant d'appliquer la deuxième loi, il constate que pour se déplacer ainsi, il faut exercer une force vers l'axe pour contrebalancer une force qui s'exerce vers l'extérieur (c'est la force centrifuge)

$$\mathbf{F}_{\text{centr.}} = -m\mathbf{a}_r = m\omega^2 r \mathbf{e}_r$$

puis une autre force vers la gauche pour contrebalancer une force qui tire vers la droite, dont la grandeur est

$$\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = -m(\mathbf{a}_{1\theta} + \mathbf{a}_{2\theta}) = -2m\omega v' \mathbf{e}_\theta$$

Cette pseudo-force est appelée force de Coriolis.

La deuxième loi de Newton s'écrit alors

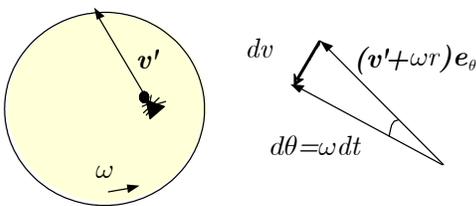
$$0 = m\mathbf{a}' = \mathbf{F}^{\text{res}} = \mathbf{f} + \mathbf{F}_{\text{centr.}} + \mathbf{F}_{\text{Coriolis}}$$

5.4.4 Analyse des accélérations : Mouvement dans une direction tangentielle

Supposons maintenant que la mouche, se déplace sur un cercle de rayon r par rapport au centre de la table, avec une vitesse tangentielle de grandeur constante dans S' , c.-à-d. $v'_r = 0$ ou $v'_\theta = v'$ alors

$$\mathbf{v}' = v' \mathbf{e}_\theta.$$

Voyons encore le point de vue de S . Dans S , la vitesse de la mouche est (voir figure



5.12)

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v' \mathbf{e}_\theta + (\omega r) \mathbf{e}_\theta \\ &= (v' + r\omega) \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

où \mathbf{e}_θ est un vecteur unitaire tangent au cercle de rayon r et dans le sens du mouvement. Puisque le mouvement est circulaire, la force de frottement se doit d'être

$$\mathbf{f} = -m \frac{(v' + r\omega)^2}{r} \mathbf{e}_r$$

Figure 5.12 ▲ Variation du vecteur de vitesse pendant la rotation.

Accélérations par rapport à S **Accélérations qui dépendent du mouvement même du repère**

Isolons l'accélération qui dépend du mouvement même du repère. Pendant un intervalle de temps dt , le vecteur vitesse tourne d'un angle $d\theta = \omega dt$ ce qui entraîne une variation dont la grandeur est

$$dv = |(v' + \omega r) \mathbf{e}_\theta| \omega dt \quad (5.18)$$

et la direction est perpendiculaire à la vitesse \mathbf{v}' , vers la gauche (voir figure 5.12) du mouvement ce qui donne une accélération dans la direction radiale

$$\mathbf{a}_{1r} + \mathbf{a}_{2r} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_r = -(\omega^2 r + v' \omega) \mathbf{e}_r \quad (5.19)$$

Le premier terme est un terme d'accélération centripète

$$\mathbf{a}_{1r} = -\omega^2 r \mathbf{e}_r. \quad (5.20)$$

Accélération qui dépend du mouvement par rapport au repère S'

Cette contribution à l'accélération vient du fait que la vitesse tangentielle de la table, à l'endroit occupé par la mouche, change de direction lorsque la mouche se déplace. Voyons en effet ce qui se passe dans le repère de la table (voir figure 5.13).

Pendant un intervalle de temps dt , la mouche a parcouru l'arc ds sous-tendant un arc $d\theta$, d'où $ds = r d\theta$. Voyons la variation de vitesse de la table pendant ce court intervalle de temps. La différence entre le vecteur \mathbf{v}_{T2} et le vecteur \mathbf{v}_{T1} est donc un vecteur de grandeur

$$dv_T = v_T d\theta \quad (5.21)$$

que l'on peut écrire aussi

$$dv_T = v_T \frac{ds}{r} \quad (5.22)$$

ou encore, en divisant par dt

$$\frac{dv_T}{dt} = \frac{v_T}{r} \frac{ds}{dt} \quad (5.23)$$

et finalement

$$\frac{dv_T}{dt} = \omega v' \implies \mathbf{a}_{3r} = -\omega v' \mathbf{e}_r. \quad (5.24)$$

Le terme de droite est simplement l'accélération ressentie par la mouche en changeant de position sur la table. Cette accélération de grandeur $\omega v'$ est dirigée selon $-\mathbf{e}_r$, c'est-à-dire, perpendiculairement à la vitesse et vers la gauche de celle-ci.

De plus, pour maintenir le mouvement circulaire de la mouche sur la table, on doit ajouter l'accélération centripète dans S'

$$\mathbf{a}_{4r} = -\frac{v'^2}{r} \mathbf{e}_r$$

Au total, cette mouche ressentira donc :

1. une accélération centripète : $\mathbf{a}_{1r} = -\omega^2 r \mathbf{e}_r$
2. une accélération de grandeur : $\mathbf{a}_{2r} + \mathbf{a}_{3r} = -2\omega v' \mathbf{e}_r$ dirigée vers la gauche de la direction de son mouvement.
3. une accélération centripète dans S' : $\mathbf{a}_{4r} = -\frac{v'^2}{r} \mathbf{e}_r$

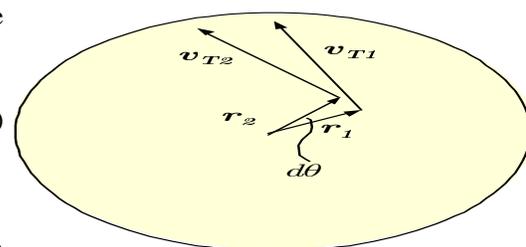


Figure 5.13 ▲ Mouvement dans une direction tangentielle.

5. Repères accélérés

Dans S , ceci est dû à la force de frottement, donc :

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} &= m(\mathbf{a}_{1r} + \mathbf{a}_{2r} + \mathbf{a}_{3r} + \mathbf{a}_{4r}) \\ &= m\left(-\omega^2 r - 2\omega v' - \frac{v'^2}{r}\right)\mathbf{e}_r \\ &= \mathbf{f} = -m\frac{(v' + r\omega)^2}{r}\mathbf{e}_r \end{aligned}$$

Accélérations par rapport à S'

Pour l'observateur de S' , le mouvement de la mouche est circulaire et son accélération est centripète

$$\mathbf{a}' = -\frac{v'^2}{r}\mathbf{e}_r$$

De plus, il est en mesure de mesurer la force de frottement

$$\mathbf{f} = -m\frac{(v' + r\omega)^2}{r}\mathbf{e}_r$$

Il trouve donc un déficit de force équivalent à

$$m\mathbf{a}' - \mathbf{f} = m(\omega^2 r + 2\omega v')\mathbf{e}_r$$

qu'il doit attribuer à des pseudo-forces comme suit : Il lui faut exercer une force vers l'axe pour contrebalancer une force qui s'exerce vers l'extérieur (c'est la force *centrifuge*)

$$\mathbf{F}_{\text{centr.}} = -m\mathbf{a}_{1r} = m\omega^2 r\mathbf{e}_r,$$

puis une autre force vers *la gauche* pour contrebalancer une force qui tire vers *la droite*, dont la grandeur est

$$\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = -m(\mathbf{a}_{2r} + \mathbf{a}_{3r}) = 2m\omega v'\mathbf{e}_r$$

c'est-à-dire une force de *Coriolis*.

La deuxième loi de Newton s'écrit alors

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}^{\text{res}} = \mathbf{f} + \mathbf{F}_{\text{centr.}} + \mathbf{F}_{\text{Coriolis}}$$

En résumé, dans les cas particuliers que nous venons de voir, il y a toujours dans le repère S' une *force centrifuge* et une *force de Coriolis proportionnelle à v' et à angle droit* avec le déplacement en plus, dans ces cas de mouvements prescrits, des forces de frottements qui assurent la force centripète et équilibrent la force de Coriolis, mouvements prescrits signifiant ici que les déplacements sont imposés et qu'il faut des forces *physiques* pour qu'ils se produisent comme on le veut. Dans le cas d'une mouche qui volerait à vitesse constante par rapport au sol au-dessus d'une table tournante, il n'y aurait que les forces fictives centrifuge et de Coriolis pour décrire son mouvement par rapport à la table. Il en serait de même dans le cas d'un objet au repos sur le sol ; seules les forces centrifuge et de Coriolis existent dans le repère de la table tournante.

Références 5.3

 Simulation en java sur le site web :

<http://subaru.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/manege.html>

[http://ww2010.atmos.uiuc.edu/\(Gh\)/guides/mtr/fw/crls.rxml](http://ww2010.atmos.uiuc.edu/(Gh)/guides/mtr/fw/crls.rxml)

http://galileo.cyberscol.qc.ca/internet/vent/p_vent2_corio.htm



5.5 Repères en rotation (cas général)

- Le mouvement relatif accéléré entre deux repères peut être décomposé en deux parties distinctes :
 1. Mouvement d'accélération linéaire
 2. Mouvement de rotation

5.5.1 Repères accélérés linéairement (cas général)

Nous allons supposer un repère inertiel (axes Ox , Oy et Oz) et un repère (axes Ox' , Oy' et Oz') ayant, à un instant donné, une vitesse \mathbf{V} et une accélération linéaire \mathbf{A} dans S (voir figure 5.14). Rappelons la définition d'un vecteur et de ses composantes. Pour un espace à trois dimensions :

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 A^i \mathbf{e}_i \quad (5.25)$$

où A^i et \mathbf{e}_i sont les composantes du vecteur et les vecteurs de base unitaires du repère.

Dans le repère inertiel S et accéléré S' , un vecteur arbitraire peut donc s'écrire dans les coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \\ &= A'_x \mathbf{e}'_x + A'_y \mathbf{e}'_y + A'_z \mathbf{e}'_z \end{aligned}$$

où en général, la direction des vecteurs unitaires \mathbf{e}'_x , \mathbf{e}'_y et \mathbf{e}'_z peut changer avec le temps. Cependant, dans le cas de repères accélérés linéairement, la direction des vecteurs unitaires ne varie pas et donc il est possible de choisir les mêmes vecteurs unitaires

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}'_x, \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}'_y, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}'_z$$

Posons \mathbf{O}' , la position de l'origine de S' dans S , alors les vecteurs de position dans S et S' sont reliés en tout temps par

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{O}'$$

et

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{O}'}{dt} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \quad (5.26)$$

où \mathbf{V} est la vitesse du repère S' dans S . De la même façon,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{O}'}{dt^2} = \mathbf{a}' + \mathbf{A} \quad (5.27)$$

où \mathbf{A} est l'accélération du repère S' dans S . Il s'ensuit que dans S :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}^{\text{res}} \quad (5.28)$$

alors que dans S' :

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - m\mathbf{A} = \mathbf{F}^{\text{res}} - m\mathbf{A}. \quad (5.29)$$

Le dernier terme de l'expression précédente est la *force de d'Alembert*.

$$\mathbf{F}^{\text{d'Alembert}} = -m\mathbf{A}$$

5.5.2 Repères en rotation (cas général)

Nous allons supposer un repère inertiel S (axes Ox , Oy et Oz) et un repère tournant S' (axes Ox' , Oy' et Oz') à un instant donné, à une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ (voir figure 5.15).

Pour transformer la loi du mouvement d'un repère inertiel à un repère accéléré, il nous faut être capable de relier les dérivées par rapport au temps de quantités vectorielles exprimées dans chacun de ces repères.

Encore une fois, nous savons que dans le repère inertiel S et accéléré S' , un vecteur arbitraire peut s'écrire dans les coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \\ &= A'_x \mathbf{e}'_x + A'_y \mathbf{e}'_y + A'_z \mathbf{e}'_z \end{aligned}$$

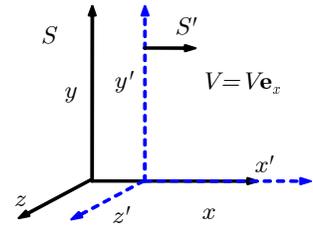


Figure 5.14 ▲

Les deux repères inertiels S et S' , où S' se déplace à une vitesse \mathbf{V} et une accélération linéaire \mathbf{A} par rapport à S . Le cas illustré correspond à \mathbf{V} choisi de telle sorte que les axes Ox et Ox' glissent l'un sur l'autre.

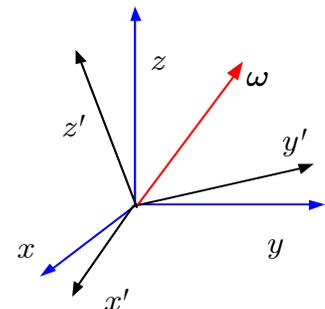


Figure 5.15 ▲

Repères en rotation.

mais cette fois-ci, puisque S' est en rotation, il est clair que la direction des vecteurs unitaires \mathbf{e}'_x , \mathbf{e}'_y et \mathbf{e}'_z change avec le temps. Il faut donc en tenir compte.

Calculons la variation de ce vecteur dans le repère inertiel S

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{e}_z \equiv \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad (5.30)$$

Le membre de droite est donc, dans les faits, la dérivée temporelle des composantes de \mathbf{A} dans S puisque \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y et \mathbf{e}_z ne varie pas avec le temps. Par ailleurs, un observateur dans S' voit aussi bien les composantes et les vecteurs de base de S' varier dans le temps :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \left(\frac{dA'_x}{dt} \mathbf{e}'_x + A'_x \frac{d\mathbf{e}'_x}{dt} \right) \\ &\quad + \left(\frac{dA'_y}{dt} \mathbf{e}'_y + A'_y \frac{d\mathbf{e}'_y}{dt} \right) \\ &\quad + \left(\frac{dA'_z}{dt} \mathbf{e}'_z + A'_z \frac{d\mathbf{e}'_z}{dt} \right). \\ &= \sum_{i=x,y,z} \frac{dA'^i}{dt} \mathbf{e}'_i + \sum_{i=x,y,z} \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} \\ &= \frac{d\mathbf{A}'}{dt} + \sum_{i=x,y,z} A'^i \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Ici, les composantes A'^i et la direction des vecteurs de base \mathbf{e}'_i changent avec le temps.

Voyons à l'aide de la figure 5.16 comment on peut calculer la variation des vecteurs unitaires. On note que

1. Le vecteur unitaire \mathbf{e}'_x est en rotation autour de l'axe parallèle à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$.
2. La pointe du vecteur \mathbf{e}'_x trace un cercle de rayon $|\mathbf{e}'_x| \sin \theta$ autour de l'axe de rotation.
3. Pendant un court instant dt , le vecteur \mathbf{e}'_x change de direction et balaie un angle $d\varphi$ sur ce cercle. La variation du vecteur \mathbf{e}'_x a pour amplitude

$$|d\mathbf{e}'_x| = |\mathbf{e}'_x| \sin \theta d\varphi = \sin \theta d\varphi \quad (5.32)$$

et $d\mathbf{e}'_x$ est orienté dans une direction perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}$ et à \mathbf{e}'_x . Comme $d\varphi = \omega dt$, on peut écrire

$$|d\mathbf{e}'_x| = |\mathbf{e}'_x| |\omega| \sin \theta dt \quad (5.33)$$

et θ étant l'angle entre les vecteurs $\boldsymbol{\omega}$ et \mathbf{e}'_x , on réalise que la longueur et la direction de $\frac{d\mathbf{e}'_x}{dt}$ correspond au produit vectoriel suivant

$$\frac{d\mathbf{e}'_x}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_x.$$

On obtient des expressions similaires pour les deux autres vecteurs unitaires \mathbf{e}'_y et \mathbf{e}'_z , qui se résument par

$$\frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i \quad (5.34)$$

où $i = x, y, z$.

Rassemblant les résultats des équations (5.30), (5.31) et (5.34), on peut donc écrire

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}' \quad (5.35)$$

où les dérivées $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ et $\frac{d\mathbf{A}'}{dt}$ s'effectue sur les composantes du vecteur dans les repères inertiel et accéléré respectivement.

Appliquons un première fois cet opérateur au vecteur position \mathbf{r}

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (5.36)$$

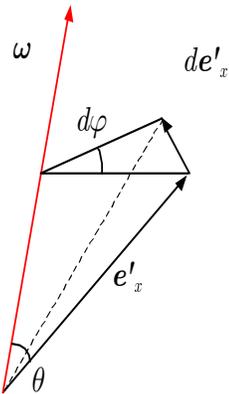


Figure 5.16 ▲
Calcul de la variation du vecteur unitaire \mathbf{e}'_x .

ou

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (5.37)$$

puis une seconde fois,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) \\ &= \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (5.38)$$

Ce dernier résultat décrit une accélération dans S . En multipliant par la masse, on obtient une relation en terme des forces :

$$\underbrace{m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}}_{\text{Force phys. (Repère inertiel)}} = \underbrace{m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} + m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}_{\text{(Repère accéléré)}} \quad (5.39)$$

Comme le membre de gauche est égal à la résultante des forces physiques \mathbf{F}^{res} , on a

$$\mathbf{F}^{\text{res}} - m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2}. \quad (5.40)$$

ou encore, rappelant les définitions de vitesse et accélération angulaires

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \quad \boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ainsi que

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \quad \mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2}$$

l'expression finale devient

$$\mathbf{F}^{\text{res}} - m\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = m\mathbf{a}'. \quad (5.41)$$

Voyons maintenant la signification de cette équation et le sens physique de chacun des termes.

1. Le membre de gauche est la résultante de toutes les forces ressenties par l'observateur du repère tournant, tant les forces réelles que les pseudo-forces. Les forces réelles sont contenues dans \mathbf{F}^{res} : on peut y trouver la gravité, une force exercée par un ressort, le frottement, etc.
2. Le terme suivant ($-m\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'$) qui est parfois appelé *pseudo-force tangentielle* (ou encore *azimutale*) n'existe que si le repère tournant a une accélération angulaire en raison de la présence de $\boldsymbol{\alpha}$. Il s'agit d'une troisième pseudo-force qui n'est présente que si il y a accélération angulaire de S' ($\boldsymbol{\alpha} \neq 0$).
3. Le terme suivant ($-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$) est la force de Coriolis ; cette force n'apparaît que s'il y a mouvement (vitesse $\mathbf{v}' \neq 0$) dans le repère tournant. Elle est à la fois perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}$ et à \mathbf{v}' . Nous verrons un peu plus loin comment se manifeste la force de Coriolis pour un objet qui se déplace sur ou près de la Terre.

Réécrivons le dernier terme en supposant que la rotation $\boldsymbol{\omega}$ se fait autour de l'axe Oz ou Oz' . Alors

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \omega \mathbf{e}'_z \\ \mathbf{r}' &= x' \mathbf{e}'_x + y' \mathbf{e}'_y + z' \mathbf{e}'_z \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') &= -m [\boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}' \omega^2] \\ &= -m [\omega^2 z' \mathbf{e}'_z - \omega^2 (x' \mathbf{e}'_x + y' \mathbf{e}'_y + z' \mathbf{e}'_z)] \\ &= m\omega^2 (x' \mathbf{e}'_x + y' \mathbf{e}'_y). \end{aligned}$$

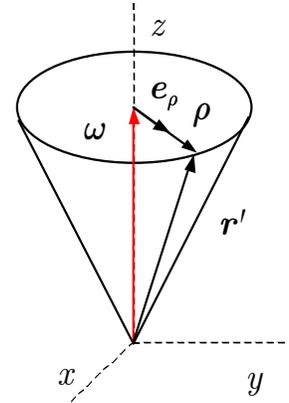


Figure 5.17 ▲ Orientation du terme $m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$.

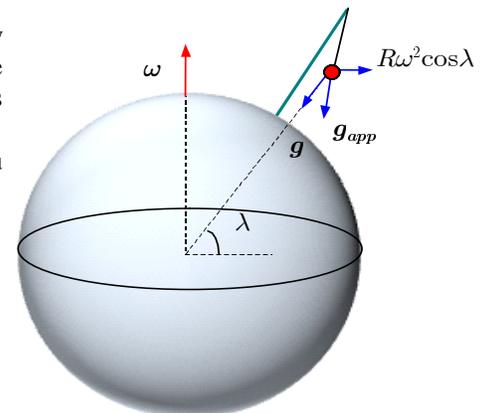


Figure 5.18 ▲ Fil à plomb situé à une latitude λ .

Comme on peut le voir sur la figure 5.17, ce terme peut s'écrire

$$m\omega^2 (x'e'_x + y'e'_y) = m\omega^2 \rho e_\rho$$

où e_ρ est un vecteur unitaire dans le plan xOy (ou vecteur unitaire dans le système de coordonnées cylindrique). C'est là la *force centrifuge*.

En résumé, dans un repère en rotation, les forces en jeu sont :

1. Les *forces physiques* dont la résultante est : \mathbf{F}^{res} et trois pseudo-forces.
 2. La *force centrifuge* : $\mathbf{F}_{\text{centr.}} = -m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}')$.
 3. La *force de Coriolis* présente si \mathbf{v}' est non nulle : $\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\omega \times \mathbf{v}'$.
 4. La *force tangentielle ou azimutale* présente si α est non nulle : $\mathbf{F}_{\text{azim.}} = -m\alpha \times \mathbf{r}'$.
- L'équation de mouvement s'écrit

$$\begin{aligned} m\mathbf{a}' &= \mathbf{F}^{\text{res}} + \mathbf{F}_{\text{azim.}} + \mathbf{F}_{\text{Coriolis}} + \mathbf{F}_{\text{centr.}} \\ &= \mathbf{F}^{\text{res}} - m\alpha \times \mathbf{r}' - 2m\omega \times \mathbf{v}' - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

5.6 Mouvements observés de la surface de la Terre

Par rapport aux étoiles fixes, notre planète, la Terre, est un superbe repère tournant. On peut se demander si les effets de cette rotation sur des corps au repos ou en mouvement à la surface sont mesurables.

Dans l'équation (5.41), nous allons considérer que la vitesse angulaire de la Terre est constante (d'où $\alpha = 0$) et que la résultante des forces $\mathbf{F} = \mathbf{f} + m\mathbf{g}$ où \mathbf{g} est l'accélération de la gravité d'où

$$\underbrace{\mathbf{f} + m\mathbf{g}}_{\text{Forces résultantes dans le repère inert.}} - m\alpha \times \mathbf{r}' - 2m\omega \times \mathbf{v}' - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}') = \underbrace{m\mathbf{a}'}_{\text{Forces résultantes dans le repère acc.}} \quad (5.42)$$

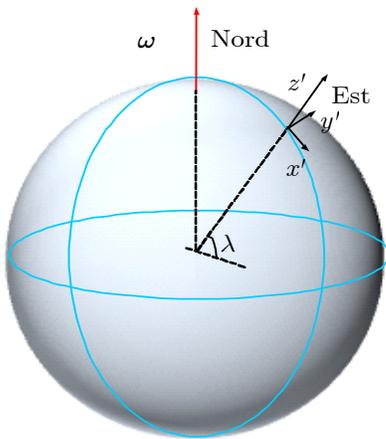


Figure 5.19 ▲ Repère terrestre.

5.6.1 Gravité apparente

Supposons-nous en un point de la Terre de latitude λ (voir figure 5.18). Nous appellerons *gravité apparente* la résultante de la somme des forces gravitationnelle et centrifuge.

$$\mathbf{g}_{\text{app}} = \mathbf{g} - \omega \times (\omega \times \mathbf{r}'). \quad (5.43)$$

Le deuxième terme est la force centrifuge dont la grandeur est

$$mR\omega^2 \cos \lambda \quad (5.44)$$

et de direction *perpendiculaire à l'axe de la Terre*. Cela signifie qu'un fil à plomb ne pointe pas, en général, vers le centre de la Terre (sauf aux pôles et à l'Équateur où $\mathbf{g} \parallel \omega \times (\omega \times \mathbf{r}') \parallel \mathbf{r}$). La grandeur de la pesanteur se trouve affectée à mesure qu'on va vers l'Équateur.

D'autre part, c'est en raison de cette force que notre Terre n'est pas une sphère parfaite. En effet, il s'agit plutôt d'une sphéroïde dont le rayon polaire est de 6 357 km alors que son rayon équatorial est de 6 378 km. Puisque que nous en sommes à considérer la Terre, mentionnons aussi que sa vitesse angulaire ω est de $0.729 \times 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette vitesse n'est pas tout à fait constante, ni en grandeur (elle diminue légèrement avec le temps), ni en direction. Cependant, ces deux effets peuvent facilement être négligés dans tous les cas que nous rencontrerons.

5.6.2 Mouvement d'un projectile près de la surface de la Terre

Pour étudier le mouvement d'un projectile près de la surface de la Terre, nous adapterons encore une fois l'équation (5.41) en posant :

1. $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ (nous négligeons toutes les forces *réelles* autres que la gravité, comme la résistance de l'air) ;
2. encore ici $\alpha = 0$;
3. $\mathbf{g}_{\text{app}} \approx \mathbf{g}$ d'où

$$m\mathbf{a}' \approx m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (5.45)$$

Nous travaillons dans le repère qui est illustré à la figure 5.19. L'axe Oz' est la verticale du lieu, l'axe Ox' pointe vers le Sud et l'axe Oy' vers l'Est. L'angle λ est la latitude du lieu (angle à partir de l'Équateur).

Dans ce repère, la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ s'écrit

$$\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{e}'_x \omega \cos \lambda + \mathbf{e}'_z \omega \sin \lambda \quad (5.46)$$

où $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$. La force de Coriolis $\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$. Posant

$$\mathbf{v}' = v'_x \mathbf{e}'_x + v'_y \mathbf{e}'_y + v'_z \mathbf{e}'_z$$

et utilisant

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_x & \mathbf{e}'_y & \mathbf{e}'_z \\ -\omega \cos \lambda & 0 & \omega \sin \lambda \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{pmatrix}.$$

la force de Coriolis devient

$$\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = 2m\omega [\mathbf{e}'_x v'_y \sin \lambda - \mathbf{e}'_y (v'_x \sin \lambda + v'_z \cos \lambda) + \mathbf{e}'_z v'_y \cos \lambda]. \quad (5.47)$$

Voyons l'effet de cette force à la surface de la Terre ($v'_z \approx 0$) dans l'hémisphère Nord et l'hémisphère Sud (en substituant $\lambda \rightarrow -\lambda$) respectivement :

Direction de la vitesse	$\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} / 2m\omega$	Direction de l'accélération	
		Hémis. Nord	Hémi. Sud
Nord ($v'_x < 0, v'_z \approx 0$)	$ v'_x \sin \lambda \mathbf{e}'_y$	Est	Ouest
Est ($v'_y > 0$)	$ v'_y (\sin \lambda \mathbf{e}'_x + \cos \lambda \mathbf{e}'_z)$	Sud et haut	Nord et haut
Sud ($v'_x > 0, v'_z \approx 0$)	$- v'_x \sin \lambda \mathbf{e}'_y$	Ouest	Est
Ouest ($v'_y < 0$)	$ v'_y (-\sin \lambda \mathbf{e}'_x - \cos \lambda \mathbf{e}'_z)$	Nord et bas	Sud et bas
Haut ($v'_z > 0$)	$- v'_z \cos \lambda \mathbf{e}'_y$	Ouest	Ouest
Bas ($v'_z < 0$)	$ v'_z \cos \lambda \mathbf{e}'_y$	Est	Est

Lors d'un mouvement pratiquement parallèle à la surface de la Terre (composante $v'_z \approx 0$), le mouvement horizontal est prescrit par

$$\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} \approx 2m\omega [\mathbf{e}'_x v'_y \sin \lambda - \mathbf{e}'_y (v'_x \sin \lambda)]. \quad (5.48)$$

donc le projectile est donc toujours dévié vers la droite (gauche) dans l'hémisphère Nord (Sud). Par contre à l'équateur $\lambda = 0$,

$$\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} \approx 2m\omega [-\mathbf{e}'_y v'_z + \mathbf{e}'_z v'_y] \approx 0. \quad (5.49)$$

la déviation se fera à la verticale, puisqu'on néglige la composante initiale $v'_z \approx 0$.

Si on développe l'équation (5.45) selon ses composantes, on a

$$a'_x = a'_{0x} + 2\omega v'_y \sin \lambda \quad (5.50)$$

$$a'_y = a'_{0y} - 2\omega (v'_x \sin \lambda + v'_z \cos \lambda) \quad (5.51)$$

$$a'_z = -g + a'_{0z} + 2\omega v'_y \cos \lambda \quad (5.52)$$

5. Repères accélérés

Nous sommes en présence d'équations différentielles couplées assez complexes. En général, il est difficile d'obtenir les solutions analytiques à ces équations.

Toutefois, selon les conditions initiales qui nous sont données ici, il est possible d'arriver à une solution approximative. En effet, la vitesse angulaire ω est faible et il est possible d'isoler les termes dominants en ω dans les équations couplées.

1. On effectue d'abord une première intégration en posant négligeant la force de Coriolis ($\omega = 0$ en première approximation) ce qui nous donne un premier estimé de $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'(t)$.
2. Puis on substitue le résultat $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'(t)$ dans les membres de gauche des équations précédentes.
3. Pour y arriver, il suffit de négliger les termes en ω^2 (la vitesse angulaire de la Terre ω est relativement petite) avant d'intégrer ces équations pour obtenir l'équation paramétrique de la trajectoire.

Exemple 5.6

 Supposons un objet qu'on laisse tomber d'une hauteur h au-dessus de la surface de la Terre. On se demande de combien il va dévier de la verticale et dans quelle direction, pour une latitude Nord λ donnée. En l'absence de la force de Coriolis ($\omega = 0$), on aurait

$$\begin{aligned} a'_x &= 0 \\ a'_y &= 0 \\ a'_z &= -g \end{aligned}$$

et cet objet aurait une vitesse $v'_z = -gt$, en prenant $t = 0$ au moment où on le laisse tomber. En première approximation,

$$\begin{aligned} v'_x &= 0 \\ v'_y &= 0 \\ v'_z &= -gt \end{aligned}$$



Reprenons les équations couplées (5.50-5.52) en posant une vitesse initiale $\mathbf{v}' = 0$. et insérons ces résultats dans les membres de gauche. Gardant que les termes dominants en ω , on aura

$$\left. \begin{aligned} a'_x &= 2\omega v'_y \sin \lambda \\ a'_y &= -2\omega (v'_x \sin \lambda + v'_z \cos \lambda) \\ a'_z &= -g + 2\omega v'_y \cos \lambda \end{aligned} \right\} \implies \begin{cases} a'_x = 0 \\ a'_y = -2\omega v'_z \cos \lambda \\ a'_z = -g \end{cases}$$

La seule équation qui est affectée par la force de Coriolis (correction d'ordre ω) est donc (5.51) qui devient

$$a'_y = 2\omega(gt) \cos \lambda.$$

On intègre deux fois en posant les conditions initiales $y'(0) = 0$ et $v'_y(0) = 0$ pour obtenir

$$y' = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \lambda.$$

Le temps de chute étant $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, on a finalement

$$y' = \frac{1}{3} \omega \sqrt{\frac{8h^3}{g}} \cos \lambda.$$

Pour avoir une idée des ordres de grandeur en jeu, prenons $h = 1000 \text{ m}$, $\lambda = 25^\circ \text{ N}$, la vitesse angulaire est $\omega = 0.7 \times 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

$$y' = \frac{1}{3} (0.7 \times 10^{-4}) \sqrt{\frac{8(1000)^3}{9.8}} \cos \left(\frac{25}{180} \pi \right) = 0.6 \text{ m}$$

On obtient un écart y' d'environ 0.6 m vers l'Est.

Pour améliorer l'approximation, il suffit de passer à l'étape suivante : Posons un cas plus général où la vitesse initiale est $v'_0 = (v'_{0x}, v'_{0y}, v'_{0z})$

1^{ère} approximation $O(\omega^0)$:

$$\left. \begin{array}{l} a'_x = 0 \\ a'_y = 0 \\ a'_z = -g \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v'_x = v'_{0x} \\ v'_y = v'_{0y} \\ v'_z = -gt + v'_{0z} \end{array} \right.$$

2^e approximation $O(\omega^1)$:

$$\left. \begin{array}{l} a'_x = 2\omega v'_y \sin \lambda \\ a'_y = -2\omega (v'_x \sin \lambda + v'_z \cos \lambda) \\ a'_z = -g + 2\omega v'_y \cos \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a'_x = 2\omega v'_{0y} \sin \lambda \\ a'_y = -2\omega (v'_{0x} \sin \lambda + (-gt + v'_{0z}) \cos \lambda) \\ a'_z = -g + 2\omega v'_{0y} \cos \lambda \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v'_x = 2\omega v'_{0y} t \sin \lambda \\ v'_y = -2\omega (v'_{0x} t \sin \lambda + (-\frac{1}{2}gt^2 + v'_{0z}t) \cos \lambda) \\ v'_z = -gt + 2\omega v'_{0y} t \cos \lambda \end{array} \right.$$

3^e approximation $O(\omega^2)$:

$$\left. \begin{array}{l} a'_x = 2\omega v'_y \sin \lambda \\ a'_y = -2\omega (v'_x \sin \lambda + v'_z \cos \lambda) \\ a'_z = -g + 2\omega v'_y \cos \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a'_x = 2\omega (-2\omega (v'_{0x} t \sin \lambda + (-\frac{1}{2}gt^2 + v'_{0z}t) \cos \lambda)) \sin \lambda \\ a'_y = -2\omega (2\omega v'_{0y} t - gt \cos \lambda) \\ a'_z = -g + 2\omega (-2\omega (v'_{0x} t \sin \lambda + (-\frac{1}{2}gt^2 + v'_{0z}t) \cos \lambda)) \cos \lambda \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v'_x = \omega^2 (-v'_{0x} (1 - \cos 2\lambda) + v'_{0z} \sin 2\lambda) t^2 + \frac{1}{3}gt^3 \sin 2\lambda \\ v'_y = \omega gt^2 \cos \lambda - 2\omega^2 v'_{0y} t^2 \\ v'_z = -gt + \frac{1}{3}gt^3 \omega^2 (1 + \cos 2\lambda) - t^2 \omega^2 (v'_{0z} (1 + \cos 2\lambda) + v'_{0x} \sin 2\lambda) \end{array} \right.$$

et ainsi de suite

Exemple 5.7

✦ Missile balistique : Supposons que nous voulions lancer un missile balistique en direction du sud (c'est-à-dire $v_{y0} = 0$), pour une portée d'environ 200 km . Par combien le missile sera-t-il dévié de sa trajectoire sud ?

Pour avoir un ordre de grandeur de la vitesse de lancement, supposons un angle de lancement de 45° et utilisons la relation bien connue

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\phi}{g}$$

où R est la portée et ϕ l'angle de lancement ; on obtient alors une vitesse de

$$v_0 = \sqrt{\frac{Rg}{\sin 2\phi}} = \sqrt{\frac{2 \times 10^5 (9.8)}{\sin(\frac{\pi}{2})}} = 1400\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

ou encore $5040\text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Voyons maintenant les déviations entraînées par la force de Coriolis sur la trajectoire de ce missile. Il y a en fait des contributions qui viennent du mouvement selon la verticale et aussi du mouvement selon l'horizontale. Suivant l'angle de lancement nous avons

$$v'_0 = v_0 (\cos \phi, 0, \sin \phi) = \frac{v_0}{\sqrt{2}} (1, 0, 1)$$

Puisque $v'_{y0} = 0$, on obtient en première approximation (pour ω petit)

$$\left. \begin{array}{l} a'_x = 2\omega v'_y \sin \lambda \\ a'_y = -2\omega (v'_x \sin \lambda + v'_z \cos \lambda) \\ a'_z = -g + 2\omega v'_y \cos \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a'_x = 0 \\ a'_y = -2\omega (v'_x \sin \lambda + v'_z \cos \lambda) \\ a'_z = -g \end{array} \right.$$



Voyons en détails ces deux contributions.

Selon la verticale : Concentrons nous sur la deuxième contribution à a'_y (proportionnelle à v'_z). Le mouvement, sans les corrections, est donné par

$$v'_z = v'_0 \sin \phi - gt \tag{5.53}$$

alors que d'après (5.51)

$$\begin{aligned} a'_{y1} &= -2\omega v'_z \cos \lambda \\ &= -2\omega v'_0 \sin \phi \cos \lambda + 2\omega gt \cos \lambda \end{aligned}$$

c'est-à-dire, donc, une contribution vers l'ouest. Si on utilise l'équation (5.53) pour la vitesse v'_z et qu'on intègre deux fois, on obtient pour cette première contribution

$$y'_1 = -\omega \cos \lambda \left(v'_0 \sin \phi t^2 - \frac{1}{3} g t^3 \right).$$

Comme la durée du vol est $2 \frac{v'_0}{g} \sin \phi$, on a finalement

$$\begin{aligned} y'_1 &= -\omega \cos \lambda \left(v'_0 \sin \phi t^2 - \frac{1}{3} g t^3 \right) \Big|_{t=0}^{t=\frac{2v'_0}{g} \sin \phi} \\ &= -\frac{4\omega}{3g^2} v_0^3 \sin^3 \phi \cos \lambda. \end{aligned}$$

Selon l'horizontale : Considérons maintenant la contribution horizontale (proportionnelle à v'_x). La vitesse est de l'ordre de $v'_x = v'_0 \cos \phi$ et considérée constante durant le vol d'où une autre contribution vers l'Ouest, venant du premier terme de l'équation (5.51), soit

$$\begin{aligned} a'_{y2} &= -2\omega v'_x \sin \lambda \\ &= -2\omega v'_0 \cos \phi \sin \lambda \end{aligned}$$

Encore une fois, après avoir substitué la vitesse selon Ox , on intègre deux fois pour obtenir

$$\begin{aligned} y'_2 &= -\omega v_0^2 t^2 \cos \phi \sin \lambda \Big|_{t=0}^{t=\frac{2v'_0}{g} \sin \phi} \\ &= -\frac{4\omega v_0^3 \sin^2 \phi}{g^2} \cos \phi \sin \lambda \end{aligned}$$

la somme de ces deux déviations donnant la déviation totale selon l'axe Oy' ;

$$y' = y'_1 + y'_2$$

comme ces deux déviations sont négatives, la déviation totale est donc vers l'Ouest. Pour les valeurs données, vitesse de lancement de $1400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, angle de tir de 45° , rotation de la Terre de $0.73 \times 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, la latitude de Québec étant 46° et $g \simeq 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, on obtient approximativement 2.8 km (vers l'Ouest) ce qui est loin d'être négligeable.

$$y'_1 = -\frac{4(0.73 \times 10^{-4})(1400)^3}{3(9.8)^2} \left(\sin \left(\frac{45}{180} \pi \right) \right)^3 \cos \left(\frac{46}{180} \pi \right) = -683 \text{ m}$$

$$y'_2 = -\frac{4(0.73 \times 10^{-4})(1400)^3 \left(\sin \left(\frac{45}{180} \pi \right) \right)^2}{(9.8)^2} \cos \left(\frac{45}{180} \pi \right) \sin \left(\frac{46}{180} \pi \right) = -2122 \text{ m}$$

$$y' = y'_1 + y'_2 = -2805 \text{ m}$$

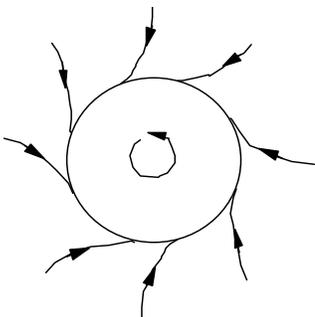


Figure 5.20 ▲
Directions des vents dans l'hémisphère Nord.

Cyclones

En raison d'effets thermiques, de grandes masses d'air sont parfois mises en mouvement vers des zones de basse pression. Comme les vitesses peuvent devenir assez grandes, l'effet de la force de Coriolis se fera sentir et déviara vers la droite l'air qui descend ce qui engendrera un mouvement anti-horaire pour les cyclones qui se forment dans l'Hémisphère Nord (voir figure 5.20) et dans le sens inverse, dans l'Hémisphère Sud.

Force de Coriolis : Interprétations erronées

1. **Lavabo** : Contrairement à une croyance populaire, la force de Coriolis bien qu'elle soit présente n'est pas responsable du sens de rotation de l'écoulement de l'eau dans un lavabo qui se vide. Un tel effet serait envisageable seulement pour une masse d'eau stabilisée dans un très grand bassin circulaire d'un diamètre de l'ordre d'au moins plusieurs dizaines de kilomètres celui-ci ne serait perceptible que sur quelques centimètres. Pour un lavabo, les causes du sens de rotation de l'eau sont variées : géométrie du lavabo, aux microcourants d'eau créés lors de son remplissage ou autres agitations de l'eau. La force de Coriolis s'écrit

$$\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = -2m\|\boldsymbol{\omega}\|\|\mathbf{v}'\|\sin\lambda$$

avec

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= 0.73 \times 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ \mathbf{v}' &= \text{vitesse de l'eau} \\ \lambda &= \text{latitude}\end{aligned}$$

Considérons $\|\mathbf{v}'\| = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ et la latitude de Québec étant 46° nous obtenons une accélération

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\text{Coriolis}} &= -2(0.73 \times 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})(0.01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \sin\left(\frac{46}{180}\pi\right) \\ &= -1.05 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}\end{aligned}$$

Soit 10 000 000 fois moins que l'accélération due à la pesanteur ($g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$). La force de Coriolis n'a pas le temps d'agir pour influencer de façon perceptible le mouvement de l'eau avant que le bassin ne se vide.

2. **Tornade** : La rotation dans une tornade est le plus souvent anti-horaire mais ce n'est pas dû à la force de Coriolis. Dans ce cas, la rotation est initiée par la configuration des vents dans la couche d'air près du sol qui donne une rotation horizontale de l'air. Lorsque le fort courant ascendant d'un orage verticalise cette rotation et qu'elle se concentre, le sens est déjà déterminé. Ici encore l'effet de Coriolis est trop faible et n'a pas le temps d'avoir un impact significatif.
3. **Tourbillon** : Dans le cas d'un tourbillon de poussières, l'orientation de la rotation est causée par une différence des vents horizontaux. L'effet de Coriolis est trop faible pour déterminer celle-ci et d'ailleurs on observe que la rotation dans ces vortex sont statistiquement divisés également entre horaires et anti-horaires, quelle que soit l'hémisphère.
4. La force de Coriolis ne dépend pas de la courbure de la Terre, seulement de sa rotation et de la latitude où on se trouve.
5. La trajectoire des missiles balistiques ou projectile est courbée lorsque tracée sur une carte. En général cependant, ce sont les vents et la projection qui a servi à faire la carte qui explique une partie dominante de la déviation plutôt que l'effet de Coriolis, qui reste quand même présent.

Pendule de Foucault

En 1851, dans le Panthéon à Paris, le physicien Léon Foucault fit une démonstration, à l'aide d'un pendule de 67 m de long, pour mettre en évidence le mouvement de rotation de la Terre. On peut voir de tels pendules dans le hall d'entrée de l'Organisation des Nations Unies (ONU) à New York, et assez souvent dans les grands musées scientifiques comme le *Smithsonian Institute* de Washington, par exemple.



Figure 5.21 ▲
Léon Foucault (1819-1868)

Sans entrer dans le détail des équations, voyons de quelle façon se déplace ce pendule. Supposons qu'un tel pendule attaché au-dessus du pôle Nord et qu'on le regarde osciller du point de suspension (voir figure 5.23). Au cours de l'oscillation le menant de A à B , il dévierait légèrement de sa trajectoire vers la droite sous l'effet de la force de Coriolis. En revenant de B à C , il en serait de même si bien que le plan d'oscillation, au bout du compte, tournait vers la droite, à vitesse constante.

On admet aisément que le plan de rotation tournera, au pôle Nord, avec une vitesse angulaire égale à celle de la Terre : *le pendule est immobile par rapport à un repère inertiel qui serait attaché à des étoiles lointaines*. La Terre tournant de la droite vers la gauche, on a ainsi l'impression que le pendule tourne dans le sens inverse.

Examinons maintenant en détail, le mouvement du pendule. Celui-ci est déterminé par l'expression suivante :

$$\mathbf{F}^{\text{res}} - m\alpha \times \mathbf{r}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = m\mathbf{a}'.$$

Le deuxième terme est négligeable dans le cas d'un repère local S' à la surface de la Terre ($\alpha \approx 0$). Posons \mathbf{r}'_c , la position du poids du pendule par rapport à son centre d'équilibre qui lui-même se trouve à la position \mathbf{R}' par rapport au centre de la Terre.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{res}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') &= \mathbf{f} + m\mathbf{g} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}'_c + \mathbf{R}')) \\ &= \mathbf{f} + (m\mathbf{g} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}')) - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_c) \\ &= \mathbf{f} + m\mathbf{g}_{\text{app}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_c) \end{aligned}$$

où $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}'_c + \mathbf{R}')$ et puisque $\mathbf{r}'_c \ll \mathbf{R}'$, on peut écrire

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{f} + m\mathbf{g}_{\text{app}} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \tag{5.54}$$

On peut décomposer l'accélération en deux parties

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}'_{\text{basc.}} + \mathbf{a}'_p$$

1. La tension dans le fil, \mathbf{f} , est combinée à la gravité apparente, soit le terme $\mathbf{f} + m\mathbf{g}_{\text{app}}$, sont responsable du mouvement de bascule du pendule

$$m\mathbf{a}'_{\text{basc.}} = \mathbf{f} + m\mathbf{g}_{\text{app}} \tag{5.55}$$

2. Le reste de l'accélération du poids dans le repère à la surface de la Terre sera donc uniquement due à la force de Coriolis

$$m\mathbf{a}'_p = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'.$$

qui est dirigée perpendiculairement à $\boldsymbol{\omega}$ et à \mathbf{v}' , ce qui se traduit par une trajectoire telle qu'illustrée à la figure 5.23 et une fréquence de précession du pendule de Foucault, ω_F .

Négligeons pour le moment le mouvement vertical du pendule, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{e}'_x v'_x + \mathbf{e}'_y v'_y \\ \boldsymbol{\omega} &= -\mathbf{e}'_x \omega \cos \lambda + \mathbf{e}'_z \omega \sin \lambda \end{aligned}$$

et

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = -\mathbf{e}'_x v'_y \omega \sin \lambda + \mathbf{e}'_y v'_x \omega \sin \lambda - \mathbf{e}'_z v'_x \omega \cos \lambda.$$

Dans le plan $x'y'$, l'accélération est perpendiculaire à \mathbf{v}' ce qui imprime un mouvement circulaire à la trajectoire avec une vitesse de précession

$$\omega_F = -\omega \sin \lambda \mathbf{e}'_z \quad (\text{rotation dans le plan } xy)$$

où λ est la latitude et le signe indique que dans S' la direction du mouvement de précession est dans le sens horaire.

Il est facile de se convaincre qu'au Pôle Nord ($\lambda = 90^\circ$) la fréquence de précession est $\omega_F = -\omega$ alors qu'à l'équateur, il n'y a aucune précession. À la latitude de Québec (environ 46°), le plan d'un tel pendule tourne d'environ 10.8° à l'heure comparativement à 15° à l'heure aux pôles.

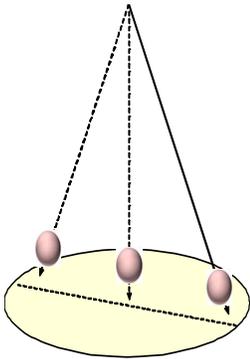


Figure 5.22 ▲
Le pendule de Foucault

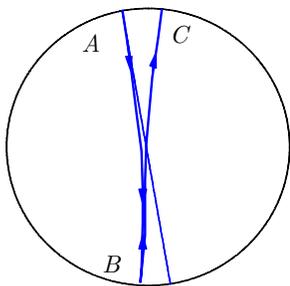


Figure 5.23 ▲
Trajectoire du pendule de Foucault dans le plan horizontal.

Références 5.4

i Renseignements complémentaires sur la force de Coriolis :
<http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/RefTerre/Foucault0.html>
http://fr.wikipedia.org/wiki/Force_de_Coriolis
http://www.classzone.com/books/earth_science/terc/content/visualizations/es1904/es1904page01.cfm?chapter_no=visualization
Simulation en javascript sur le web :
http://feynman.phy.ulaval.ca/marleau/marleau_parametric4D.html

Références 5.5

i Renseignements complémentaires sur le pendule de Foucault :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_de_Foucault
Simulation du pendule de Foucault en java sur le web :
<http://subaru.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/foucault.html>



Figure 5.24 ◀▶
Pendule de Foucault au Panthéon de Paris

5.7 Exercices

5.7.1 Rappel de cinématique non relativiste

0.1 Jeu de balle

Vous lancez une balle vers le haut avec une vitesse initiale de 7.3 m/s . Quand elle quitte votre main, la balle est à 1.5 m du sol.

- (a) Au bout de combien de temps la balle touchera-t-elle le sol ?
- (b) Quelle est la hauteur maximale atteinte par la balle ?
- (c) Quelle est la vitesse de la balle au niveau de votre main lorsqu'elle redescend ?

0.2 Navigation à bord d'un jet

Un jet voyage à une vitesse de 960 km/h . Ce jet effectue le trajet Houston-Omaha d'une distance de 1290 km vers le nord.

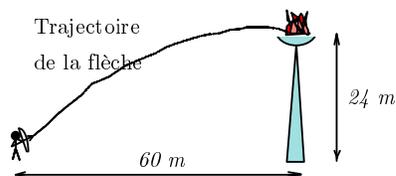
- (a) Dans quelle direction doit-il voler si il y a un vent d'ouest de 190 km/h à son altitude de croisière ?
- (b) Quelle est sa composante de vitesse dans la direction nord ?
- (c) Combien de temps durera le voyage ?
- (d) Où se retrouve-t-on si pour l'aviateur, la vitesse demeure 960 km/h ?

0.3 La flamme olympique

La flamme olympique des jeux de Barcelone en 1992 a été allumée par une flèche enflammée lancée d'un point situé à une distance de 60 m horizontalement et de 24 m plus bas et sa trajectoire initiale est inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale (voir figure 5.25). Ignorer les effets aérodynamiques.

- (a) Trouver la vitesse initiale de la flèche en fonction de l'angle θ .
- (b) Quelles sont les valeurs possibles de θ ?

Figure 5.25 ◀▶ Schéma de la situation décrite au problème 0.3



0.4 Lois de Newton

Énoncer les trois lois de la mécanique Newtonienne et donner un exemple approprié pour illustrer chacune d'elles.

0.5 Lois de Képler

Énoncer les trois lois de Képler et illustrer chacune d'elles.

0.6 Les déménageurs

Des déménageurs poussent une malle de 78 kg à 0.710 m/s lorsqu'ils rencontrent une surface rugueuse avec un coefficient de friction cinétique de 0.295 . S'ils poussent avec une force constante de 220 N , quelle est la vitesse de la malle à la fin de la surface rugueuse de 2.25 m ?

0.7 Un voilier

Est-ce qu'un voilier peut être propulsé par un gros ventilateur attaché derrière le bateau et qui souffle dans les voiles ? justifier votre réponse.

0.8 Poids suspendu

On doit suspendre un poids de 60 kg comme illustré à la figure 5.26. Malheureusement, on ne dispose que de 6 morceaux de corde qui n'ont pas la même résistance. On a deux morceaux qui peuvent supporter 900 N , deux autres qui résistent à 700 N et finalement, les moins résistant ne peuvent soutenir plus de 400 N . Calculez précisément la position des cinq morceaux nécessaire à la suspension du poids.

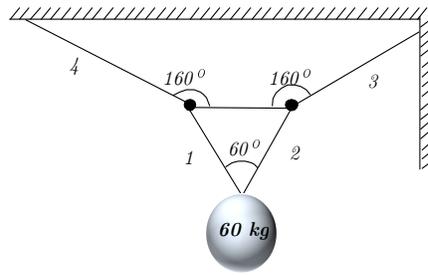


Figure 5.26 ◀▶
Schéma de la situation décrite au problème 0.8

0.9 Collision

On assiste à une collision entre deux objets (voir figure 5.27). L'objet 1 est dévié d'un angle de 30° avec une vitesse finale de 0.15 m/s .

- Quelle est la vitesse finale de l'objet 2 ?
- Calculer θ .
- La collision est-elle parfaitement élastique ?

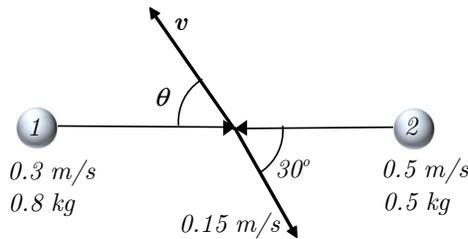


Figure 5.27 ◀▶
Schéma de la situation décrite au problème 0.9

0.10 Un chien sur une patinoire

Un chien glisse sur une patinoire avec une vitesse constante v . Il fonce dans un homme (masse de 100 kg) au repos. Ce dernier commence à glisser lui aussi. Le chien, lui, rebondit et se dirige en sens opposé. Après un certain temps, il frappe un arbre et change à nouveau de direction pour glisser dans le même sens que l'homme. Quelle doit être la masse du chien pour qu'après sa deuxième collision, il ait la même vitesse que l'homme ? (Supposez que les collisions sont parfaitement élastiques.)

0.11 Collision double

Soit le système de la figure 5.28. Montrez que si $M \leq m$, il y a 2 collisions et que si $M > m$, il y a 3 collisions. Pour chaque cas, trouvez les vitesses finales des trois balles. (Supposez que les collisions sont parfaitement élastiques.)



Figure 5.28 ◀▶
Schéma de la situation décrite au problème 0.11

0.12 Une boule de métal

Une boule de métal de 1 kg est attachée à une corde de 2.25 m . On laisse tomber la boule lorsque la corde est horizontale. Au bas de sa trajectoire, elle frappe un bloc de 5 kg qui était au repos sur une table lisse. Trouvez la vitesse de la boule et du bloc après la collision.

0.13 Une balle

Une balle est lancée vers le haut et retombe 4 secondes plus tard. Quelle était sa vitesse initiale ?

0.14 Saut en hauteur

Pour faire un saut de 1.8 m un athlète dont le centre de masse est à 1.1 m du sol décolle à 60° . Quelle doit être sa vitesse initial et à quelle distance doit-il être pour réussir son saut (son centre de masse doit passer juste au dessus de la hauteur désirée) ?

0.15 Un saut en moto

Trouvez la distance horizontale que peut parcourir un cascadeur qui veut faire un saut en moto à partir d'un plan incliné d'un angle θ et avec une vitesse v au décollage..

- (a) Trouvez l'accélération angulaire.
 (b) En supposant que l'accélération soit constante, calculez sa période de rotation lors de sa formation.

0.24 Électron autour du proton

On suppose que l'électron décrit une orbite circulaire autour du proton dans l'atome d'hydrogène. Sachant que la force électrique sert de force centripète, calculez l'énergie cinétique de l'électron.

0.25 Vitesse sur la terre

Combien de radians franchit un point sur la surface de la terre en 6 heures. Si ce point est sur l'équateur, quelle est sa vitesse tangentielle ?

0.26 Une poulie

Une poulie de 10 cm de rayon entraîne par l'intermédiaire d'une courroie une deuxième poulie de 25 cm de rayon. La première poulie part du repos et accélère à $\pi/2$ rad/s jusqu'à ce que la deuxième atteigne une vitesse angulaire de 100 tours par minutes.

- (a) Si la courroie ne glisse pas, combien de temps prend l'accélération ?
 (b) Une fois l'accélération terminée, quelle est la vitesse d'un point sur la courroie ?

0.27 Balistique

La figure 5.30 illustre une façon de déterminer la vitesse v d'une balle de fusil à partir de la mesure de la hauteur h du bloc dans lequel la balle s'est arrêtée. Obtenez la vitesse v en fonction de la hauteur h , des masses m_1 et m_2 de la balle et du bloc respectivement, et de l'accélération gravitationnelle g .

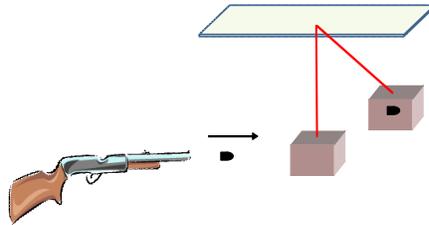


Figure 5.30 ◀▶
Schéma de la situation décrite au problème 0.27

5.7.2 Repères accélérés

5.1 Le professeur Tournesol

Un avion transportant le professeur Tournesol survole le pôle nord à une vitesse de 800 km/h en suivant un méridien de longitude (un grand arc de cercle fixe par rapport à la surface de la Terre et selon une direction nord-sud). Le professeur Tournesol tient son pendule à bout de bras devant lui (le pendule est stationnaire et n'oscille pas). Pendant ce temps, les Dupont et Dupond effectuent la même expérience à partir d'une station située au pôle nord. Quel est l'angle entre les directions du pendule de Tournesol et celui des Dupont et Dupond ?

5.2 Hypothèse sur la migration des oiseaux

On a prétendu que les oiseaux migrateurs estiment leur latitude à partir de la force de Coriolis. Quelle force un oiseau doit-il exercer pour contrebalancer la force de Coriolis et voler en ligne droite à 50 km/h ? Exprimez le résultat comme un rapport entre la force de Coriolis et la force gravitationnelle.

5.3 La mouche sur l'essuie-glace

Une mouche se pose sur le bras d'un essuie-glace, à une distance r du pivot. L'essuie-glace exécute un mouvement périodique tel que l'angle de l'essuie-glace par rapport à sa position centrale est donné par la relation

$$\theta = \theta_0 \sin(bt),$$

où θ_0 et b sont des constantes (voir figure 5.31). On néglige les forces dues à la gravité, au vent et au mouvement de la voiture.

- (a) En supposant que la mouche demeure stationnaire à sa position r , donnez une expression **vectorielle** de la force que le bras de l'essuie-glace exerce sur la mouche.
- (b) Si la mouche se déplace à vitesse constante vers le pivot, quelle force additionnelle le bras exerce-t-il sur la mouche ? Prenez soin d'indiquer la grandeur et la direction de cette force.

5.4 Un insecte

Un insecte de masse $m = 1\text{ g}$ se déplace le long du rayon d'un disque vinyle qui tourne à $33\frac{1}{3}\text{ tours/min}$. La vitesse de déplacement de l'insecte est de 1 cm/s . Quelles sont la grandeur et la direction des forces qui agissent sur l'insecte lorsque celui-ci se situe à 6 cm du centre du disque

5.5 Question d'équilibre

Un petit anneau C est libre de glisser le long d'une tige semi-circulaire ACB . La tige est en rotation à une vitesse angulaire ω autour de l'axe vertical AB (voir figure 5.32). On suppose qu'il n'y a aucune friction entre la tige et l'anneau. Déterminez les valeurs de θ pour lesquelles l'anneau ne glisse pas.

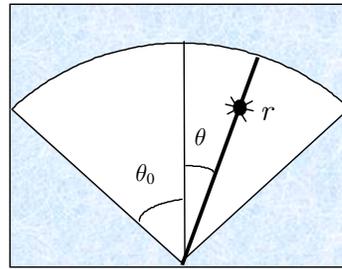


Figure 5.31 ◀▶ Schéma de la situation décrite au problème 5.3

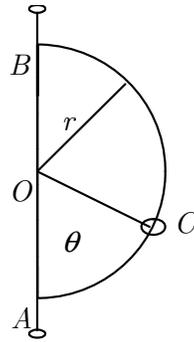


Figure 5.32 ◀▶
Schéma de la situation décrite au problème 5.5

5.6 Disque en rotation

Un petit bloc de 0.1 kg est posé sur un disque horizontal à 1 m de l'axe. Le coefficient de frottement entre le bloc et le disque est de 0.5 . Initialement au repos, le disque est ensuite soumis à une accélération angulaire constante de 0.01 rad/s^2 . On néglige la résistance de l'air et on suppose $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- Donnez la nature, la grandeur et la direction de chacune des forces qui s'exercent sur le bloc du point de vue d'un observateur placé sur le disque (repère non inertiel).
- Donnez la nature, la grandeur et la direction de chacune des forces qui s'exercent sur le bloc du point de vue d'un observateur immobile par rapport au sol (repère inertiel).

5.7 Manège et perception

Une petite fille assise par terre regarde un manège qui tourne. Pour un observateur immobile sur le manège, la petite fille effectue un mouvement circulaire uniforme autour de l'axe du manège. Expliquez.

Le frère de la petite fille court autour du manège à une vitesse telle que celui-ci lui semble immobile.

- Décrire la situation en termes de forces du point de vue du repère non inertiel qu'est le manège.
- Décrire la situation en termes de forces du point de vue d'un repère inertiel fixé au sol.

5.8 Position d'un satellite

Une planète est en orbite circulaire (de rayon R_1 et de période T_1) autour d'une étoile fixe située à l'origine. Un satellite est en orbite circulaire (de rayon R_2 et de période T_2) autour de cette planète. Les orbites sont dans le plan xy . La planète ainsi que le satellite sont sur l'axe des x à $t = 0$.

- Écrivez une expression explicite pour la position $\mathbf{r}(t)$ du satellite par rapport à l'étoile.
- On définit le moment cinétique d'une particule comme $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ (m est la masse de la particule). En considérant le satellite comme une particule, calculez son moment cinétique. Comment varie-t-il dans le temps (décrivez seulement) ?

5.9 Station spatiale en orbite

Une station spatiale est en orbite circulaire de fréquence angulaire ω et de rayon R autour de la Terre. Cette orbite n'est pas équatoriale, mais coupe l'équateur avec un angle θ . On place l'origine au centre de la Terre ; l'axe des z est l'axe de rotation de la Terre et l'axe des x passe précisément par le point où l'orbite du satellite coupe l'équateur, au temps $t = 0$.

- Donnez une expression explicite pour la position (coordonnées cartésiennes) du satellite en fonction du temps. Pour ce faire, vous pouvez supposer premièrement que l'orbite est équatoriale, trouvez les coordonnées (x, y, z) dans ce cas, puis appliquez une matrice de rotation d'un angle θ par rapport à l'axe des x .
- Calculez le vecteur-vitesse du satellite en fonction du temps, ainsi que le vecteur-accelération.

5.10 Force de d'Alembert dans l'autobus

Vous vous installez debout dans l'autobus, tenant un porte-monnaie dans votre main,

quand soudainement le conducteur appuie sur l'accélérateur de sorte que le véhicule conserve une accélération constante a_0 dans la direction des x . Sous le choc, le porte-monnaie vous échappe.

- (a) Identifiez les deux forces principales agissant sur le porte-monnaie (réelles ou fictives) dans le référentiel de l'autobus. Exprimez ces forces en fonction des vecteurs unitaires $\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z$ (on suppose bien sûr que l'axe des z est vertical).
- (b) En prenant l'origine de votre système de coordonnées à vos pieds et en supposant que le porte-monnaie se trouve initialement à une hauteur h au-dessus de celle-ci, donnez une expression pour la position $\mathbf{r}'(t)$ du porte-monnaie en fonction du temps.
- (c) Dans ces circonstances, dans quelle direction devriez-vous lancer un objet pour qu'il vous revienne dessus ?

5.11 **Force de Coriolis à l'équateur**

- (a) On se trouve à l'équateur et on lance un objet exactement à la verticale. On néglige la résistance de l'air. Dans quelle direction pointe la force de Coriolis lors de l'ascension de l'objet ? Lors de sa descente ?
- (b) Nommez les forces réelles (les plus connues) que peut subir cet objet (de nature quelconque) dans un référentiel inertiel. Donnez leur forme mathématique.

5.12 **Référentiel inertiel versus non inertiel**

On considère un référentiel inertiel (absolu) xyz par rapport auquel tourne, à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}' = \mathbf{e}'_x \cos t + \mathbf{e}'_y \sin t + \mathbf{e}'_z$, un système non inertiel d'axes $x'y'z'$. Les deux systèmes partagent la même origine. Si le vecteur position d'un point selon xyz est $\mathbf{r}(t) = \mathbf{e}'_x \sin t - \mathbf{e}'_y \cos t + \mathbf{e}'_z t$, trouvez :

- (a) la vitesse selon $x'y'z'$ (vitesse relative) et selon xyz (vitesse absolue),
- (b) l'accélération selon $x'y'z'$ (accélération relative) et selon xyz (accélération absolue).

5.13 **Plomb et plume**

Un sac de plumes à l'équateur et un sac de plomb au pôle nord ont le même poids apparent. Quel sac a la masse la plus élevée ?

5.14 **Force G**

Un pilote d'avion à réaction effectue une boucle complète (« looping ») de rayon $R = 1 \text{ km}$ à la vitesse constante de $v = 200 \text{ m/s}$. Quelle est la gravité apparente du pilote de masse m en haut (lorsqu'il a la tête en bas) et en bas de la boucle ? Quelle vitesse permet au pilote de ne sentir aucun poids en haut de la boucle ?

5.15 **Looping**

Une voiture doit, en partant d'une hauteur h sur une piste inclinée, parcourir une boucle verticale (« looping ») de rayon r et située à la sortie de la pente inclinée.

- (a) Quelle doit être la vitesse minimum v_{\min} de l'automobile en haut de la boucle afin qu'elle reste sur la piste à cet endroit ?
- (b) À quelle hauteur la voiture doit-elle partir pour atteindre cette vitesse ?

5.16 **Train électrique sur une table tournante**

Un train électrique tourne à vitesse constante v_t sur un rail circulaire et dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Ce rail est situé en périphérie d'une table circulaire de rayon r et tournant elle-même avec une vitesse angulaire constante ω_0 dans le même sens que la rotation du train. Un petit animal de masse m est placé dans l'un des wagons du train.

- (a) Quelles forces subit le petit animal ?
- (b) Quelle doit être la vitesse du train pour que l'animal ne subisse aucune force radiale ?

5.17 **Sur une autoroute...**

Sur une autoroute, on trouve une courbe ayant un rayon de courbure de 30 m . Quel doit être l'inclinaison de cette courbe par rapport au niveau du sol pour qu'une voiture roulant à 13 m/s ne remarque aucun changement en conduisant l'été sur de l'asphalte, ou l'hivers sur de la glace noir (friction négligeable.) ?

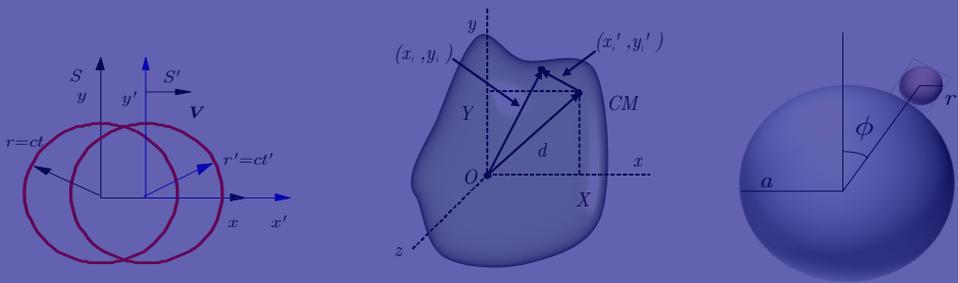
5.18 **Brique sur un disque**

À l'aide de la figure suivante, trouvez les deux positions extrêmes sur le disque où nous pouvons placer une brique de masse M sans que celle-ci ne bouge. La vitesse



6

Dynamique des solides indéformables



Chapitre 6

- 6.1 Dynamique d'un ensemble de particules 123
- 6.2 Le solide indéformable : Introduction 126
- 6.3 Mouvements combinés de translation et de rotation 135
- 6.4 Dynamique de la rotation 136
- 6.5 Solide indéformable et conservation de l'énergie 137
- 6.6 Percussion et rotation 138
- 6.7 Relation entre moment cinétique et vitesse angulaire 140
- 6.8 Introduction au gyroscope 142
- 6.9 Exercices 145

DANS CE CHAPITRE, nous verrons comment s'appliquent les lois de Newton à des ensembles de particules. Ces ensembles peuvent tout aussi bien être constitués de particules indépendantes les unes des autres, ou encore interagissant entre elles, ou encore, dans le cas du corps rigide, astreintes à demeurer à des distances constantes l'une de l'autre.

6.1 Dynamique d'un ensemble de particules

Nous allons supposer un ensemble de particules de masses m_1, m_2, \dots . Ces particules peuvent être les éléments d'un corps plus grand (ce sera le cas du corps rigide) ou tout simplement être séparées l'une de l'autre (cas du mouvement planétaire). Nous allons supposer que les forces qui agissent entre ces particules satisfont aux conditions suivantes :

1. Les forces qui s'exercent entre un couple donné de particules sont égales en grandeur et opposées en direction. ex :

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

2. Ces forces sont parallèles à la droite qui joint ces particules (ex. ceci exclut la force magnétique), ex :

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \parallel \mathbf{F}_{12}.$$

Autrement dit, si \mathbf{F}_{12} est la force exercée sur la particule 1 par la particule 2 et que \mathbf{F}_{21} est la force exercée sur 2 par 1, on a d'après le premier énoncé : $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Le deuxième énoncé précise que ces forces sont sur une même droite, ce qui n'est pas toujours le cas.

On suppose aussi qu'il existe des forces qui s'exercent sur ces particules, forces dont l'origine est en dehors du système. Ce qui signifie que sur la particule i , la force résultante sera

$$\mathbf{F}_i = \underbrace{\sum_j \mathbf{F}_{ij}}_{\text{Forces entre particules}} + \underbrace{\mathbf{F}_i^E}_{\text{Force externe}} \quad (6.1)$$

d'où, pour la deuxième loi de Newton

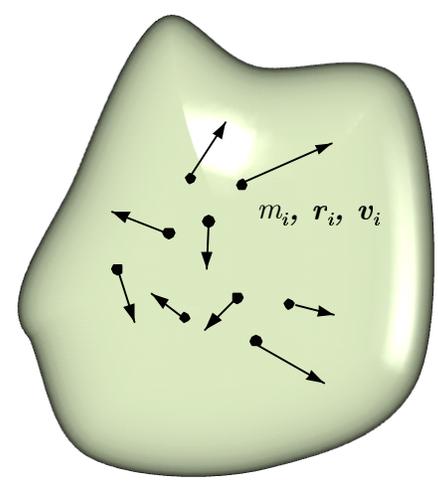


Figure 6.1 ▲ Système de particules ponctuelles de masses, positions et vitesses $m_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i$ respectivement dans un repère inertiel arbitraire.

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = \sum_j \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^E \quad (6.2)$$

où nous utilisons à l'occasion la notation

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \\ \ddot{\mathbf{a}} &= \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} \end{aligned}$$

pour un vecteur quelconque \mathbf{a} .

6.1.1 Centre de masse. Conservation de l'impulsion

La masse totale du système étant donnée par

$$M = \sum_i m_i \quad (6.3)$$

et la position du *centre de masse* par

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad (6.4)$$

on peut écrire

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = M \ddot{\mathbf{R}} = \underbrace{\sum_i \sum_j \mathbf{F}_{ij}}_0 + \underbrace{\sum_i \mathbf{F}_i^E}_{\mathbf{F}^E} \quad (6.5)$$

Le dernier terme du membre de droite de cette équation est la résultante \mathbf{F}^E des forces externes appliquées sur le système tandis que le premier terme est nul en raison des hypothèses faites sur les forces internes ; en fait chacune des forces internes intervient deux fois mais avec un signe opposé. Il reste donc

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^E \quad (6.6)$$

Physiquement, cette équation signifie que peu importe l'interaction entre les particules, le centre de masse du système va se déplacer comme une particule unique de masse M sur laquelle serait appliquées l'ensemble des forces externes.

S'il n'y a pas de forces externes appliquées sur ce système, l'équation (6.6) devient $M \ddot{\mathbf{R}} = 0$ ce qui s'écrit aussi

$$M \dot{\mathbf{R}} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{P} = \text{const.} \quad (6.7)$$

C'est la *loi de conservation de l'impulsion* pour un système de particules.

Notion de moment cinétique. Conservation du moment cinétique

Le *moment cinétique* de la particule i étant défini comme $\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ et la dérivée première étant $\dot{\mathbf{l}}_i = \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ (ce dernier terme étant nécessairement nul), on a, en tenant compte de l'équation (6.2)

$$\dot{\mathbf{l}}_i = \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_j \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \underbrace{\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^E}_{\text{torque } \tau_i} \quad (6.8)$$

Le dernier terme est le *moment des forces externes* sur la particule i , ce qu'on appelle parfois le *torque* τ_i ; de plus, on définit le *moment cinétique total du système* comme $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i$. Ainsi l'équation (6.8) devient

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \sum_j \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \sum_i \tau_i \quad (6.9)$$

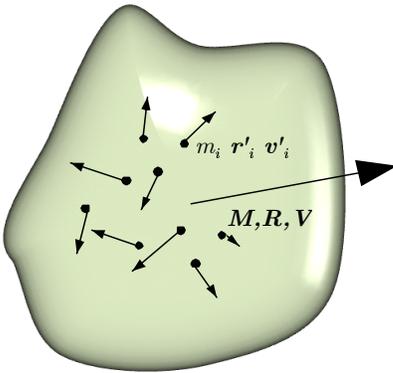


Figure 6.2 ▲ Système de particules ponctuelles de masses, positions et vitesses $m_i, \mathbf{r}'_i, \mathbf{v}'_i$ respectivement par rapport au centre de masse. M, \mathbf{R} et \mathbf{V} sont la masse totale, la position et la vitesse du centre de masse dans un repère inertiel arbitraire.

On peut montrer facilement que le terme de double sommation est nul. Prenons simplement les termes $i = 1, j = 2$ et $i = 2, j = 1$

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} \quad (6.10)$$

mais comme $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, on a

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12}. \quad (6.11)$$

Le vecteur entre les parenthèses est colinéaire au vecteur force interne

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \parallel \mathbf{F}_{12} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} = 0,$$

le produit vectoriel est donc nul. Il en est de même pour tous les autres termes. L'équation (6.9) devient donc

$$\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i \quad (6.12)$$

étant entendu ici que $\boldsymbol{\tau}$ représente la somme des moments des forces externes.

Si la résultante des moments de forces externes est nulle, on a

$$\mathbf{L} = \text{cte} \quad (6.13)$$

ce qui est la *loi de conservation du moment cinétique total*. Cette loi de conservation est d'une extrême utilité, s'appliquant tout aussi bien aux galaxies, au mouvement planétaire qu'aux atomes et aux noyaux.

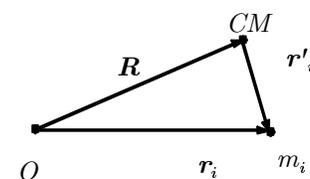


Figure 6.3 ▲
Position de la particule de masse m_i dans le système S et dans le système du centre de masse.

6.1.3 L'énergie cinétique d'un système de particules

L'énergie cinétique totale d'un système de particules est donnée par la somme des énergies cinétiques individuelles, soit

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i). \quad (6.14)$$

Comme on le voit sur la figure 6.3, il est possible de décomposer la position d'une particule en terme de la position du CM et la position de la particule par rapport au CM. On a alors

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \quad (6.15)$$

d'où pour la dérivée par rapport au temps

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i. \quad (6.16)$$

L'expression de l'énergie cinétique devient donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i V^2 + \sum_i m_i (\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}'_i) + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 \\ &= \frac{1}{2} M V^2 + \mathbf{V} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}'_i + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2. \end{aligned} \quad (6.17)$$

En utilisant l'équation (6.15), on a

$$\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \quad (6.18)$$

$$= \sum_i m_i \mathbf{r}_i - M \mathbf{R} = 0 \quad (6.19)$$

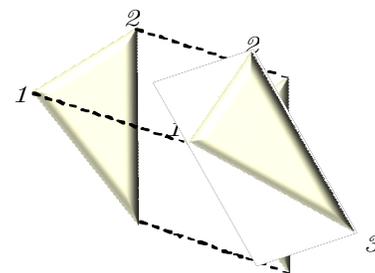


Figure 6.4 ▲
Rotation d'un corps solide.

en raison de la définition même du centre de masse. La dérivée du terme de gauche étant donc nulle, $(\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = 0 \implies \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = 0)$ l'expression (6.18) est ramenée à

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 \tag{6.20}$$

ce qui signifie que l'énergie cinétique totale d'un système de particules est égale à la somme de l'énergie cinétique du centre de masse et de l'énergie cinétique de toutes les particules *par rapport au centre de masse*.

Voici un sommaire des propriétés globales d'un système de particules :

Propriétés globales	Dynamique
$M = \sum_i m_i$	
$M\mathbf{R} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i$	
$\mathbf{P} = M\mathbf{V} = M\dot{\mathbf{R}} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$	$M\mathbf{A} = M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^E$
$M\mathbf{A} = M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i$	
$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2$	
$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$	$\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\tau}$

6.1.4 Milieux continus

Supposons maintenant qu'au lieu de considérer un ensemble de particules de masses m_1, m_2, \dots nous ayons affaire à un milieu continu comme un solide. Le même raisonnement que dans les sections précédentes s'applique encore avec toutefois un traitement qui diffère quelque peu :

1. La particule de masse m_i localisée à la position \mathbf{r}_i est remplacée par un élément de masse $\rho(\mathbf{r}) d^3r$ à la position \mathbf{r} où $\rho(\mathbf{r})$ et d^3r sont la densité de masse et l'élément de volume en trois dimensions respectivement.
2. Les propriétés des particules \mathbf{X}_i sont remplacées par des fonctions de la position $\mathbf{X}(\mathbf{r})$.
3. Les sommes \sum_i sont remplacées par des intégrales sur le volume $\int d^3r$.

Voici quelques exemples pour des relations énoncées ci-haut :

Particules ponctuelles	Milieu continu
$M = \sum_i m_i$	$M = \int d^3r \rho(\mathbf{r})$
$M\mathbf{R} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i$	$M\mathbf{R} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}$
$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2$	$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\int d^3r \rho(\mathbf{r}) v^2(\mathbf{r})$
$I = \sum_i m_i r_i^2$	$I = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) r^2$

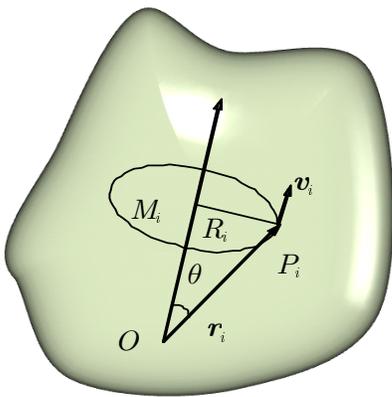


Figure 6.5 ▲
Un corps rigide tournant autour d'un axe Oz avec la vitesse angulaire ω .

6.2 Le solide indéformable : Introduction

Le solide indéformable est un bel exemple d'un ensemble de particules ; celles-ci demeurent à des distances constantes l'une de l'autre qu'il y ait ou non des forces externes ce qui signifie que le corps ne change pas de forme pendant le mouvement. C'est là évidemment une idéalisation car il n'y a pas, à proprement parler, de vrai solide indéformable. Cela fait l'objet d'un autre domaine de la physique : l'élasticité. Toutefois, dans des limites que nous nous imposons au besoin, les corps dont nous allons analyser le mouvement seront des ensembles de particules rigidement liées.

Il existe deux types de mouvement particuliers au solide indéformable : la *translation* et la *rotation*. On dit d'un solide indéformable qu'il effectue un mouvement de *translation* lorsque toutes ses parties se déplacent sur des trajectoires parallèles ; ainsi une droite qui joint deux points quelconques aura toujours une position parallèle à sa position initiale (voir figure 6.4). On parle de *rotation autour d'un axe* lorsque toutes les particules décrivent des trajectoires circulaires autour d'une ligne appelée axe de rotation. L'axe peut être fixe ou non par rapport au corps.

Le mouvement le plus général d'un solide indéformable peut toujours être ramené à une combinaison de translations et de rotations : on peut toujours trouver un système de référence en translation dans lequel le corps aura un mouvement de rotation seulement. Comme nous l'avons vu dans l'équation (6.6), soit

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^E$$

le mouvement du centre de masse est identique à celui qu'aurait une particule unique, de masse M , soumise à la résultante des forces externes appliquées sur le solide indéformable. Dans ce chapitre, c'est plutôt le mouvement de rotation autour d'un axe qui retiendra notre intérêt.

6.2.1 Rotation d'un solide indéformable autour d'un axe fixe

Nous allons considérer un solide indéformable tournant autour d'un axe Oz avec la vitesse angulaire ω (voir figure 6.5). Chacune de ses particules décrit un cercle dont le centre est sur l'axe Oz . La particule P_i , par exemple, décrit un cercle de rayon $R_i = \overline{M_iP_i}$ avec la vitesse tangentielle

$$\mathbf{v}_i = \omega \times \mathbf{r}_i \quad (6.21)$$

où \mathbf{r}_i est le vecteur position par rapport à l'origine O . La grandeur de la vitesse tangentielle est donc

$$\|\mathbf{v}_i\| = v_i = \omega R_i = \|\omega\| \|\mathbf{r}_i\| \sin \theta_i$$

où θ_i est l'angle entre ω et \mathbf{r}_i . Le moment cinétique de cette particule par rapport à l'origine O est (voir figure 6.5)

$$\mathbf{l}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = m_i \mathbf{r}_i \times (\omega \times \mathbf{r}_i). \quad (6.22)$$

Sa direction est perpendiculaire au plan déterminé par les vecteurs \mathbf{r}_i et \mathbf{v}_i , se trouvent ainsi dans le plan déterminé par le vecteur \mathbf{r}_i et l'axe Oz . Sa grandeur est

$$|\mathbf{l}_i| = m_i r_i v_i = m_i r_i (\omega R_i)$$

et sa composante parallèle à l'axe de rotation est

$$l_{iz} = m_i r_i (\omega R_i) \sin \theta_i$$

ou encore

$$l_{iz} = m_i R_i^2 \omega \quad (6.23)$$

puisque $r_i \sin \theta_i = R_i$.

La composante du moment cinétique total selon l'axe Oz est donc

$$L_z = \sum_i l_{iz} = \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega \quad (6.24)$$

et la quantité entre parenthèse est appelée *moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation* Oz et notée I , d'où

$$L_z = I\omega. \quad (6.25)$$

Le moment cinétique total $\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i$ n'est pas, en général, parallèle à l'axe de rotation ce qui signifie qu'en général le moment d'inertie ne sera pas un scalaire. Nous reviendrons sur cette question plus loin. Dans ce chapitre, à moins d'avis contraire, le vecteur \mathbf{L} sera parallèle au vecteur ω , c'est-à-dire

$$\mathbf{L} = I\omega \quad (6.26)$$

où I est une quantité scalaire.

L'énergie cinétique du solide indéformable de la figure 6.5 s'écrit

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 \tag{6.27}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega \times \mathbf{r}_i)^2 \tag{6.28}$$

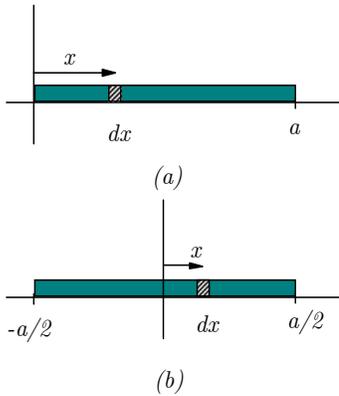
$$= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega^2 \tag{6.29}$$

ou encore

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2. \tag{6.30}$$

On peut noter, dans les expressions (6.26) donnant le moment cinétique et (6.30) pour l'énergie cinétique, que le moment d'inertie joue un rôle analogue à la masse m dans les expressions qu'on retrouve en dynamique soit $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ et $T = \frac{1}{2} m v^2$.

Particule en mouvement rectiligne	Solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe
$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	$\mathbf{L} = I\omega$
$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$	$\tau = I\alpha$
$T = \frac{1}{2} m v^2$	$T = \frac{1}{2} I \omega^2$



6.2.2 Moments d'inertie de divers corps

Dans les calculs habituels du moment d'inertie, il faut remplacer la sommation sur plusieurs particules par une intégration sur l'ensemble du corps, d'où

$$I = \int R^2 dm \tag{6.31}$$

où

$$dm = \text{élément de masse}$$

que l'on exprime habituellement par le produit de la densité ρ (linéique, surfacique ou volumique) et de la quantité différentielle appropriée (longueur dL , surface dA ou volume dV).

$$dm = \rho_L dL \text{ ou } \rho_A dA \text{ ou } \rho_V dV.$$

Il est important de se rappeler que R est la distance entre l'élément de masse et l'axe de rotation (prise *perpendiculairement* à l'axe).

1. Tige mince

(a) *Rotation par rapport à l'extrémité* (voir figure 6.6a) : En supposant que la densité linéique est uniforme, l'élément de masse s'écrit $dm = \rho_L dx$, la masse M et le moment d'inertie I sont

$$M = \int_0^a \rho_L dx = \rho_L x \Big|_0^a = \rho_L a$$

$$I = \int_0^a x^2 \rho_L dx = \rho_L \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{1}{3} \rho_L a^3 = \frac{1}{3} M a^2.$$

(b) *Rotation par rapport au centre* (voir figure 6.6b) :

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \rho_L dx = \rho_L \frac{x^3}{3} \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{1}{12} \rho_L a^3 = \frac{1}{12} M a^2.$$

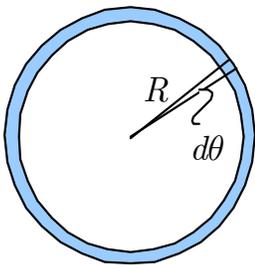


Figure 6.6 ▲ Tige mince: Rotation par rapport à l'extrémité (a) et au centre (b) respectivement.

Figure 6.7 ▲ Moment d'inertie d'un anneau.

2. Anneau circulaire

Profitant du fait que distribution de matière est uniforme autour de l'axe et qu'il y a symétrie, nous écrivons l'élément de masse s'écrit $dm = \rho_\theta d\theta$, la masse M et le moment d'inertie I sont

$$M = \int_0^{2\pi} \rho_\theta d\theta = 2\pi\rho_\theta$$

$$I = \int_0^{2\pi} R^2 \rho_\theta d\theta = \int_0^{2\pi} R^2 \frac{M}{2\pi} d\theta = MR^2$$

où R son rayon de l'anneau. Moment d'inertie d'un disque.

3. Disque circulaire

Il y a avantage ici à travailler en coordonnées polaires (r, θ) et à prendre comme élément de masse un anneau mince de rayon r et d'épaisseur dr soit une densité par unité de surface constante ρ , surface constante ρ_A ,

$$dm = \rho_A 2\pi r dr$$

Alors la masse du disque est

$$M = \int_0^R \rho_A 2\pi r dr = \pi\rho_A R^2.$$

Le moment d'inertie dans ce cas s'écrit donc (voir figure 6.8)

$$I = \int_0^R \rho_A r^2 2\pi r dr = 2\pi\rho_A \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2.$$

4. Sphère

Dans ce cas, nous allons supposer que la sphère est constituée de disques minces dont l'axe est celui par rapport auquel nous voulons calculer le moment d'inertie soit Oz (voir figure 6.9). L'élément de volume d'un disque de rayon y et d'épaisseur dz étant $\pi y^2 dz$, son élément de masse est

$$dm = \rho_V \pi y^2 dz$$

et la masse de la sphère de rayon R est

$$M = \int_{-R}^R \rho_V \pi y^2 dz = \rho_V \pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2) dz = \frac{4\pi R^3}{3} \rho_V$$

comme il se doit, c'est-à-dire le produit de son volume et de sa densité. Par ailleurs, le moment d'inertie associé au disque de rayon y est $\frac{1}{2}y^2 dm$ alors

$$I = \int_{-R}^R \frac{1}{2} \pi \rho_V y^4 dz = \frac{1}{2} \pi \rho_V \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{8}{15} \pi \rho_V R^5$$

C'est-à-dire

$$I = \frac{2}{5}MR^2.$$

Voici les moments d'inertie I de certains objets géométriques de densité uniforme par rapport à l'axe de symétrie : M est la masse et R la longueur qui caractérise la géométrie de l'objet (ex. longueur de la tige ou rayon de la sphère).

Objet	Moment d'inertie I
Tige mince p/r extrémité :	$\frac{1}{3}MR^2$
Tige mince p/r centre :	$\frac{1}{12}MR^2$
Sphère pleine :	$\frac{2}{5}MR^2$
Sphère creuse ou coquille mince :	$\frac{2}{3}MR^2$
Disque ou cylindre plein :	$\frac{1}{2}MR^2$
Cylindre creux ou anneau mince :	MR^2
Anneau épais :	$\frac{1}{2}M(R_{\text{int}}^2 + R_{\text{ext}}^2)$

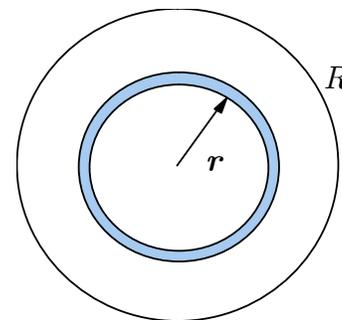


Figure 6.8 ▲
Moment d'inertie d'un disque.

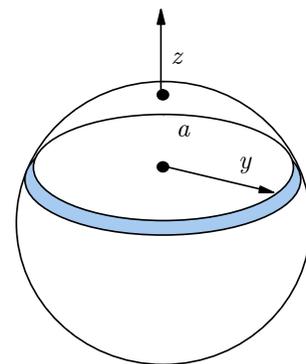


Figure 6.9 ▲
Moment d'inertie d'une sphère.

Rayon de giration

On remarque que les moments d'inertie sont tous de la forme

$$\text{masse de l'objet} \times (\text{dimension caractéristique})^2. \tag{6.32}$$

On introduit alors une quantité k , appelée le *rayon de giration*, telle que

$$I = Mk^2. \tag{6.33}$$

Ainsi, il est souvent plus pratique de caractériser les objets par leur rayon de giration. M est la masse et R la longueur qui caractérise la géométrie de l'objet (ex. longueur de la tige ou rayon de la sphère).

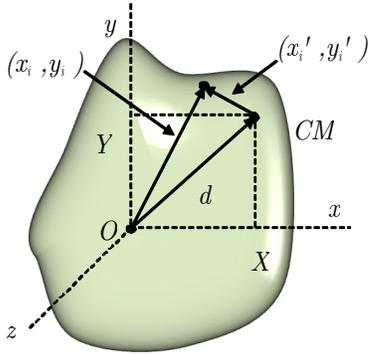


Figure 6.10 ▲ Corps solide en rotation autour de l'axe d.

6.2.3

Théorème des axes parallèles

Le moment d'inertie dépend de la forme du solide mais aussi de sa position et de son orientation par rapport à l'axe de rotation. On a pu s'en rendre compte dans le calcul du moment d'inertie d'une tige mince plus haut. Dans certains cas, il devient nécessaire de calculer à nouveau explicitement le moment d'inertie. Le théorème des axes parallèles et le théorème des plaques minces (ou des axes perpendiculaires) peuvent toutefois simplifier ces calculs puisque certaines relations s'appliquent en cas de symétrie.

Considérons le moment d'inertie d'un corps autour d'un axe, disons Oz (voir figure 6.10). Les particules de masse m_i situées aux points $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ contribuent au moment d'inertie

$$I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2). \tag{6.34}$$

Mais

$$\begin{aligned} x_i &= X + x'_i \\ y_i &= Y + y'_i \end{aligned}$$

où $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ est la position du centre de masse et $\mathbf{r}'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)$, la position des particules par rapport au point \mathbf{R} . L'expression (6.34) s'écrit alors

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i \left((X + x'_i)^2 + (Y + y'_i)^2 \right) \\ &= \underbrace{\sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2)}_{I \text{ p/r au c.m.}} + \underbrace{\sum_i m_i (X^2 + Y^2)}_{M \cdot d^2} \\ &\quad + 2X \underbrace{\sum_i m_i x'_i}_{=0} + 2Y \underbrace{\sum_i m_i y'_i}_{=0} \end{aligned}$$

où

$$d^2 = X^2 + Y^2$$

est la distance entre le centre de masse et l'axe.

1. Le premier terme étant le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à l'axe Oz mais passant par le centre de masse ;

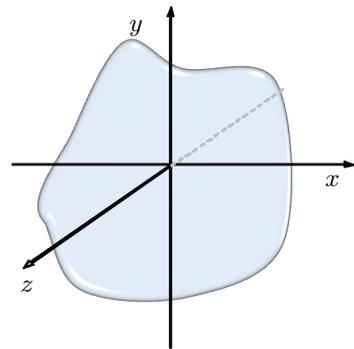


Figure 6.11 ▲ Plaque mince en rotation autour de l'axe des z.

- Le deuxième terme est égal à la masse totale multipliée par le carré de la distance entre l'axe Oz et l'axe parallèle passant par le centre de masse ($M \cdot d^2$).
 - Les deux derniers termes sont nuls d'après la définition même du centre de masse.
- Il reste donc

$$I = I_{CM} + M \cdot d^2. \quad (6.35)$$

C'est là l'expression du *théorème des axes parallèles* ; si l'on veut le moment d'inertie d'un corps autour d'un axe et qu'on connaît le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par le centre de masse, il suffit d'ajouter à cette dernière quantité M fois le carré de la distance entre les deux axes.

Exemple 6.1

◆ Dans le cas du moment d'inertie de la tige mince calculé par rapport à un axe passant par une des extrémités et par le centre de masse respectivement (voir figure 6.6), on a en effet

$$I_{extr} = I_{CM} + M \cdot d^2 \quad (6.36)$$

$$= \frac{1}{12} M a^2 + M \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} M a^2. \quad (6.37)$$



Exemple 6.2

◆ Par exemple, Considérons le moment d'inertie d'un bouton à quatre trous de rayon R (voir figure 6.12) en rotation autour de l'axe perpendiculaire passant par son centre. Les quatre trous sont de rayon r et sont situés à une distance d du centre. Le bouton a la forme d'un disque troué de densité uniforme ρ_A . La masse du bouton s'écrit donc comme la masse du disque m_{disque} de laquelle on soustrait la masse de matière qu'on a enlevée pour faire place à chaque trou m_{trou}

$$\begin{aligned} M_b &= m_{\text{disque}} - 4m_{\text{trou}} \\ &= \pi R^2 \rho_A - 4\pi r^2 \rho_A \\ &= \pi \rho_A (R^2 - 4r^2). \end{aligned}$$

De la même façon, on soustrait du moment d'inertie du disque la contribution des trous. Le moment d'inertie du bouton est alors donné par

$$I_b = I_{\text{disque}} - 4I_{\text{trou}}$$

où

$$I_{\text{disque}} = \frac{1}{2} m_{\text{disque}} R^2 = \pi \rho_A \frac{R^4}{2}$$

et utilisant le théorème des axes parallèles

$$\begin{aligned} I_{\text{trou}} &= \frac{1}{2} m_{\text{trou}} r^2 + m_{\text{trou}} d^2 = \frac{1}{2} \pi r^4 \rho_A + \pi r^2 \rho_A d^2 \\ &= \pi \rho_A \left(\frac{r^4}{2} + r^2 d^2 \right). \end{aligned}$$

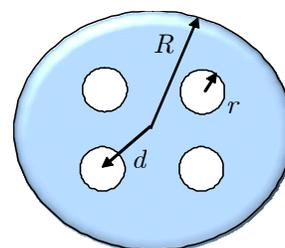


Figure 6.12 ▲
Bouton à quatre trous.

Donc

$$\begin{aligned}
 I_b &= \pi \rho_A \left(\frac{R^4}{2} - 4 \left(\frac{r^4}{2} + r^2 d^2 \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} M_b \left(\frac{R^4 - 8d^2 r^2 - 4r^4}{R^2 - 4r^2} \right).
 \end{aligned}$$

On note que pour des boutons de masses identiques, le moment d'inertie diminuera lorsque d et r augmentent. Dans la limite où r tends vers 0, on récupère le résultat pour un disque plein soit $I_b \rightarrow \frac{1}{2} M_b R^2$.

Remarque 6.1

i On note que le moment d'inertie d'un objet composé de plusieurs éléments est la somme de moments d'inertie de ses parties.

6.2.4 Théorème des plaques minces (ou des axes perpendiculaires)

Utilisant encore une fois les symétries d'un problème, il est possible d'obtenir une relation entre les moments d'inertie pour des objets dont on peut négliger l'épaisseur : le *théorème des plaques minces (ou des axes perpendiculaires)*.

Supposons une plaque mince de forme arbitraire (voir figure 6.11) où nous identifions les axes Ox et Oy avec le plan de la plaque et l'axe de rotation Oz qui traverse perpendiculairement cette plaque par le point O . Considérons le moment d'inertie I_z de cette plaque autour de l'axe Oz . Il vaut, par définition

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \tag{6.38}$$

On alors peut écrire

$$I_z = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2. \tag{6.39}$$

Comme l'objet est plat, le premier terme est tout simplement I_y tandis que le second est I_x , de telle sorte que nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème des plaques minces (ou des axes perpendiculaires).

$$I_z = I_x + I_y \quad (\text{pour une plaque mince}). \tag{6.40}$$

Ce théorème peut être fort utile dans le calcul des moments d'inertie ; on doit se rappeler qu'il ne s'applique qu'à des objets minces.

Exemple 6.3

i Supposons un disque de masse M et de rayon R (voir figure 6.13). On veut connaître son moment d'inertie par rapport à la droite DD' qui est parallèle à un diamètre et tangente au disque. On sait que par rapport à un axe perpendiculaire passant par le centre du disque, le moment d'inertie est

$$I_z = \frac{1}{2} MR^2.$$

Appliquons le théorème des plaques minces,

$$I_z = I_x + I_y = 2I_y$$

ce qui nous donne le moment d'inertie par rapport à un diamètre, soit : $I_y = \frac{1}{4} MR^2$. Appliquons enfin le théorème des axes parallèles avec $d = R$, d'où

$$\begin{aligned}
 I_{DD'} &= I_y + MR^2 \\
 &= \frac{1}{4} MR^2 + MR^2 = \frac{5}{4} MR^2.
 \end{aligned}$$

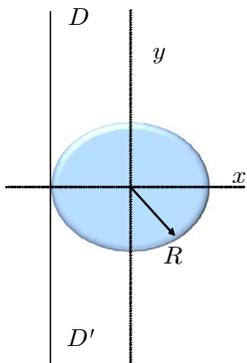


Figure 6.13 ▲
Disque de masse M et de rayon R en rotation par rapport à l'axe DD' .

On voit ainsi que l'usage combiné des deux théorèmes peut nous éviter de calculer des moments d'inertie.



6.2.5 Équation de mouvement et cinématique de rotation

Nous avons vu précédemment que pour un ensemble de particules, on avait

$$\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\tau} \quad (6.41)$$

où \mathbf{L} est le moment cinétique total et $\boldsymbol{\tau}$ le moment des forces externes. Cette équation est valide dans le cas d'un solide indéformable et, si nous considérons le cas d'un corps qui tourne autour d'un axe tel que l'équation $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ est valide, ce qui est le cas dans ce cours, alors

$$I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \quad (6.42)$$

ou encore

$$I\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\tau}$$

où $\boldsymbol{\alpha}$ est l'accélération angulaire.

La similitude entre l'équation du mouvement de translation, c'est-à-dire $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ et l'équation (6.42) est parfaite. Dressons un tableau comparatif des quantités en jeu : Si I est constant,

Particule en mouvement rectiligne	Solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe
$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$
$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$	$\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$
$T = \frac{1}{2}mv^2$	$T = \frac{1}{2}I\omega^2$

En raison de cette similitude, on admet facilement que seront valides les équations suivantes permettant de décrire le mouvement de rotation d'un solide indéformable autour d'un axe : Pour une accélération angulaire constante $\boldsymbol{\alpha}$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\alpha}t \quad (6.43)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\omega}_0t + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}t^2. \quad (6.44)$$

6.2.6 Conservation du moment cinétique

En particulier, si $\boldsymbol{\tau} = 0$, on doit avoir conservation de la quantité $I\boldsymbol{\omega}$. Dans le cas d'un solide indéformable à *géométrie variable*, cela veut dire que si I augmente, la quantité $\boldsymbol{\omega}$ doit diminuer et *vice versa*. On connaît bien le cas des vrilles en patinage de fantasia et celui du plongeur du haut-vol qui se plie sur lui-même pour augmenter sa vitesse de rotation.

6.2.7 Condition d'équilibre statique

La statique est un cas particulier de la dynamique, c'est le cas où il n'y a pas de mouvement. Les conditions d'équilibre statique sont $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} = 0$ en tout temps donc

$$\mathbf{F}^{\text{res}} = 0$$

$$\boldsymbol{\tau} = 0$$

où \mathbf{F}^{res} et $\boldsymbol{\tau}$ sont la force et le moment de force résultant des forces extérieures.

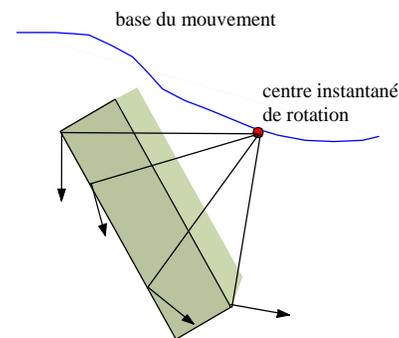


Figure 6.14 ▲

Centre et axe instantané de rotation: obtenu par l'intersection des droites perpendiculaires aux vecteurs de vitesse de chaque point d'un solide dans le repère inertiel. La base du mouvement est la surface balayée par l'axe instantané de rotation.

6.2.8 Centre instantané de rotation, roulante et base du mouvement

Considérons un solide indéformable en mouvement dans un plan, le plan xy par exemple. Imaginons aussi le plan $x'y'$ fixe par rapport au solide indéformable et parallèle au plan xy . Alors à tout moment, un point du plan $x'y'$ sera au repos par rapport au plan xy . Ce point est appelé le *centre de rotation instantané*.

Le centre instantané peut se trouver à l'extérieur du corps et peut se déplacer. On le trouve en posant pour ce point, une vitesse nulle dans le plan xy ,

$$\mathbf{v}_c = 0 = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_c = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_c$$

où $\mathbf{r}_c, \mathbf{v}_c$ et $\mathbf{r}'_c, \mathbf{v}'_c$ sont la position et vitesse du centre dans S et S' respectivement et \mathbf{V} la vitesse de S' par rapport à S .

Alors en multipliant le membre de droite par $\boldsymbol{\omega}$, on obtient

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} &= -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_c) = -((\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'_c) \boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{r}'_c) \\ &= \omega^2 \mathbf{r}'_c. \end{aligned}$$

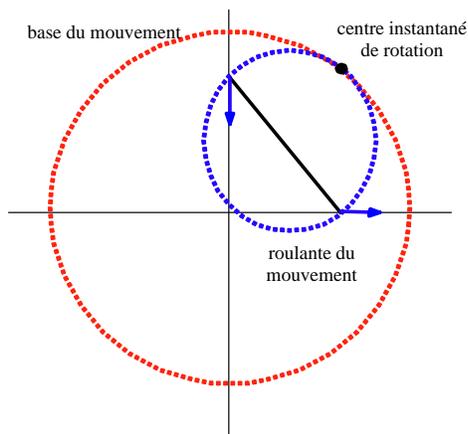


Figure 6.15 ◀▶ Exemple de l'échelle glissant lon long d'un mur: La roulante roule sur la base du mouvement.

Comme $\boldsymbol{\omega}$ est perpendiculaire à \mathbf{r}'_c , on trouve la position du centre instantané de rotation dans S' ,

$$\mathbf{r}'_c = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}}{\omega^2}$$

ou dans S

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_c = \mathbf{R} + \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}}{\omega^2}.$$

où \mathbf{R} est la position de l'origine de S' dans S .

Puisque dans S , tous les points du corps sont en rotation par rapport à ce centre instantané, la vitesse de chaque point correspond à la vitesse tangentielle.

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c).$$

Donc les droites perpendiculaires à la vitesse de tous les points se croisent toutes au centre instantané. Si le mouvement est une translation pure, le centre instantané est à l'infini (voir figure 6.14).

L'axe perpendiculaire au plan passant par le centre instantané est appelé l'*axe instantané*. On définit la *base du mouvement* comme la surface balayée par l'axe instantané de rotation dans le repère inertiel S . On définit la *roulante du mouvement* comme la surface balayée par l'axe instantané de rotation par rapport au plan du solide indéformable. Le mouvement du solide indéformable peut alors être décrit comme le roulement de la roulante sur la base.

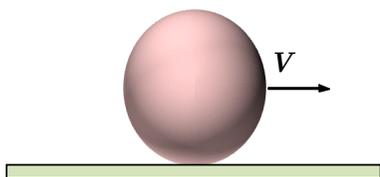


Figure 6.16 ▲ Boule de quille en mouvement.

6.3 Mouvements combinés de translation et de rotation

Les amateurs de quilles ou de billards savent qu'une boule peut glisser sans pratiquement rouler ou encore rouler presque sur place sans pratiquement se déplacer. Ces observations nous serviront comme point de départ pour réfléchir à la question suivante : qu'est-ce qui relie la translation et la rotation ou encore le roulement et le glissement ? Dans ce qui va suivre, nous ne considérerons que les forces dans le plan horizontal et nous négligerons la résistance de l'air.

6.3.1 Frottement, glissement et roulement

Pour illustrer la relation entre frottement, glissement et roulement, posons le problème suivant : on lance une boule de quille sans lui donner de mouvement de rotation. Sur la figure 6.16, on voit la boule juste au moment où elle va toucher le plancher. La vitesse (horizontale) de son centre de masse est alors V . Tout de suite après le contact, il y a nécessairement glissement puisque la boule n'est pas en rotation et que tous ses points ont alors la même vitesse V .

Écrivons ce que sont alors les équations du mouvement, tout juste après le contact (voir figure 6.17). La seule force horizontale en jeu est la force de frottement en glissement f_g , d'où

$$-f_g = Ma \quad (6.45)$$

et pour la rotation (moment de force)

$$f_g R = I\alpha. \quad (6.46)$$

Si f_g est constante (en général proportionnel à la force normale), les vitesses du centre de masse par rapport au sol et angulaire en fonction du temps sont données par

$$v = v_0 - \frac{f_g}{M}t \quad (6.47)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{f_g R}{I}t \quad (6.48)$$

où v_0 et ω_0 sont respectivement la vitesse et vitesse angulaire initiales de la boule ($\omega_0 = 0$ dans notre cas). Cette dernière équation nous permet d'obtenir la vitesse tangentielle du point de contact de la boule par rapport son centre, ou inversement la vitesse du centre de la boule par rapport au point de contact, soit

$$v_t = R\omega = \frac{f_g R^2}{I}t. \quad (6.49)$$

À l'instant t' où cette vitesse sera égale à la vitesse du centre de masse, la vitesse de la boule au point de contact sera nulle

$$v_0 - \frac{f_g}{M}t' = \frac{f_g R^2}{I}t'$$

c'est-à-dire

$$t' = \left(\frac{MI}{MR^2 + I} \right) \frac{v_0}{f_g}$$

le glissement cessera et la boule commencera à rouler sans glisser. À partir de ce moment, le frottement n'est plus nécessaire pour maintenir la rotation et $f_g = 0$.

En principe, la boule peut rouler indéfiniment (on a posé que la résistance de l'air était négligeable) ; il existe toutefois une *résistance de roulement* (rolling friction) qui est, en fait, due aux déformations tant de la boule que du plancher, au point de contact. Ces déformations, même si elles paraissent minimes à première vue, dissipent peu à peu l'énergie cinétique et la boule finit par s'arrêter.

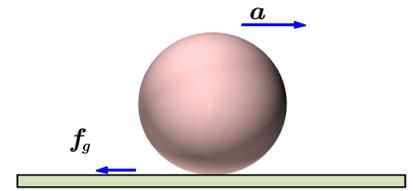


Figure 6.17 ▲
Boule de quille en mouvement soumise à la force de frottement.

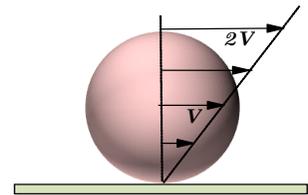


Figure 6.18 ▲
Mouvement de la boule par rapport au point de contact avec roulement sans glissement.

Ce qu'il est important de retenir, c'est que la condition pour qu'il y ait *roulement sans glissement*, est

$$v = \omega R \tag{6.50}$$

où v est la vitesse centre de rotation par rapport au point de contact au sol ou la vitesse tangentielle du point de contact au sol par rapport au centre de rotation.

6.4 Dynamique de la rotation

Nous allons voir, à partir de quelques exemples, comment utiliser les équations du mouvement, soit la force $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ et le moment de force $\tau = I\alpha$ pour résoudre des problèmes où il y a rotation.

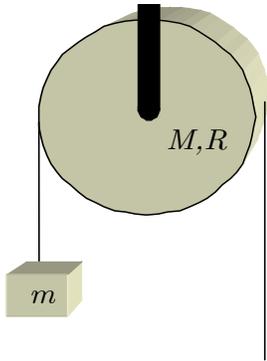


Figure 6.19 ▲
Disque de rayon R et de masse M autour duquel est enroulée une corde qui est reliée une masse m .

Exemple 6.4

Machine de Atwood : Prenons le cas d'un disque de rayon R et de masse M . On suppose qu'il peut tourner librement autour d'un axe passant par son centre. Quelle est l'accélération angulaire de ce disque si on attache une masse m à une corde enroulée autour (voir figure 6.19) ?

Écrivons d'abord l'équation de mouvement de la masse m . Soit T , la tension dans la corde,

$$mg - T = ma.$$

D'autre part, l'équation de mouvement angulaire du disque s'écrit ($\tau = I\alpha$)

$$\begin{aligned} \tau &= I\alpha \\ TR &= \frac{1}{2}MR^2\alpha. \end{aligned}$$

Ici, puisque la corde ne glisse pas sur le disque, la condition de roulement sans glissement

$$\begin{aligned} v &= \omega R \\ \text{ou } a &= \alpha R \end{aligned}$$

s'applique. Si on élimine T de ces deux équations, on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{mg}{(m + \frac{1}{2}M)R} = \frac{1}{(1 + \frac{M}{2m})} \frac{g}{R} \\ \text{ou } a &= \frac{m}{(m + \frac{1}{2}M)} g = \frac{1}{(1 + \frac{M}{2m})} g \end{aligned}$$



Exemple 6.5

Supposons un disque de masse M et de rayon R qui roule sans glisser sur un plan incliné d'angle θ (voir figure 6.20). Dans un tel mouvement, l'axe de rotation se déplace mais ne change pas de direction. En plus, de la gravité Mg et de la poussée exercée par le sol N , le mouvement de rotation sera engendré par la force de frottement F au point de contact.



Écrivons les équations du mouvement :

Pour la translation du CM,

$$M\ddot{x} = Mg \sin \theta - F \quad \text{et} \quad M\ddot{y} = -Mg \cos \theta + N.$$

Comme le corps reste en contact avec le plan, $y = \text{cte}$ d'où une accélération nulle selon Oy , c'est-à-dire $\ddot{y} = 0$. La force de poussée du plan sur le disque N est donc égale à $Mg \cos \theta$. La seule force qui exerce un moment autour du CM du disque est la force de frottement F .

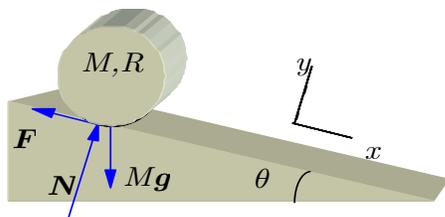


Figure 6.20 ▲
Disque sur un plan incliné.

L'équation de la rotation s'écrit donc

$$I\alpha = FR.$$

Il reste maintenant à établir une relation entre la rotation et le mouvement du CM. Cela va venir de la condition de roulement sans glissement. En effet, si le disque ne glisse pas, c'est que la vitesse du CM par rapport au plan incliné est égale à la vitesse du point de contact par rapport au centre de masse, donc de la vitesse tangentielle du disque d'où

$$v = \omega R$$

$$a = \alpha R$$

où v et a sont la vitesse et l'accélération du CM. Alors

$$F = \frac{I\alpha}{R} = \frac{I\ddot{x}}{R^2}$$

et

$$Ma = Mg \sin \theta - \frac{I\ddot{x}}{R^2}.$$

Cette dernière équation nous permet donc d'éliminer α et de trouver la quantité cherchée, soit

$$\begin{aligned} a_{CM} &= \frac{Mg \sin \theta}{M + \frac{I}{R^2}} \\ &= \frac{2g \sin \theta}{3} \end{aligned}$$

avec $I = \frac{1}{2}MR^2$ pour un disque.

6.5 Solide indéformable et conservation de l'énergie

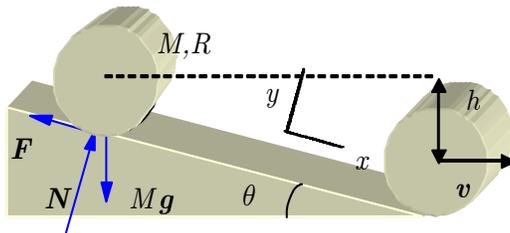


Figure 6.21 ◀▶
Cylindre partant du repos sur un plan incliné.

Connaissant les succès qu'on obtient en appliquant le principe de conservation de l'énergie, on peut avoir l'idée de chercher comment on pourrait appliquer ce principe au mouvement du solide indéformable. Pour ce qui est de l'énergie cinétique, il n'y a pas trop de problème ; il doit y avoir une énergie de translation du centre de masse ($\frac{1}{2}Mv^2$) et une énergie de rotation ($\frac{1}{2}I\omega^2$). De plus, il ne doit pas y avoir de forces dissipatrices qui agissent sur le système.

Prenons un exemple, celui d'un cylindre qui roule sur un plan incliné (voir figure 6.21).

En prenant le bas du plan incliné comme niveau zéro de l'énergie potentielle, on peut écrire

$$\underbrace{Mgh}_{\text{cylindre au repos sur le plan incliné}} = \underbrace{\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cyl}}\omega^2}_{\text{cylindre au bas du plan incliné}}. \quad (6.51)$$

Comme le cylindre roule sans glisser, on a une relation entre la vitesse v du centre de masse et la vitesse angulaire ω soit

$$v = \omega R.$$

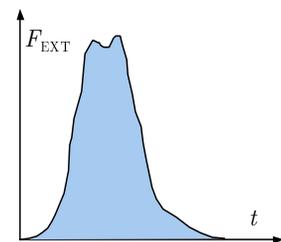


Figure 6.22 ▲
Distribution de la force en fonction du temps durant une percussion.

Alors, connaissant le moment d'inertie d'un cylindre ($I_{cyl} = \frac{1}{2}MR^2$),

$$\begin{aligned} Mgh &= \frac{1}{2} \left(M + \frac{I}{R^2} \right) v^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}M \right) v^2 \end{aligned}$$

on trouve aisément

$$v = \sqrt{\frac{MR^2}{MR^2 + I_{cyl}} 2gh} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}. \tag{6.52}$$

Remarque 6.2

i Comme on a roulement sans glissement, il y a une force de frottement statique entre le cylindre et le plan incliné. Comme une force de frottement dissipe habituellement de l'énergie, a-t-on le droit d'appliquer le principe de conservation de l'énergie ? **i**

Il est peut-être approprié à ce stade de distinguer deux type de forces de frottement celles que nous appellerons la force de frottement *statique* et la force de frottement *cinétique* (la même distinction s'applique pour les coefficients de frottement). Le frottement *cinétique* (ou avec glissement) qui dissipe de l'énergie est celui que l'on rencontre lorsque deux surfaces glissent l'une par rapport à l'autre. Il suffit de se frotter les mains ensemble pour ressentir la chaleur qui provient de la dissipation d'énergie. Par contre, c'est le frottement *statique* (ou sans glissement) qui est en jeu lorsqu'un objet roule sur un plan incliné, par exemple, les surfaces ne se déplacent pas latéralement l'une par rapport à l'autre. Au niveau microscopique, lorsqu'il y a glissement, les aspérités des surfaces s'accrochent et se brisent, d'où un dégagement de chaleur. Dans le cas où les surfaces ne glissent pas, et c'est justement ce qui nous intéresse, les aspérités ne font que s'accrocher sans se briser, ce qui dissipe peu ou pas d'énergie.

frottement *cinétique* (ou avec glissement) \implies dissipe de l'énergie
 frottement *statique* (ou sans glissement) \implies conserve l'énergie

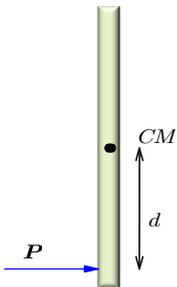


Figure 6.23 ▲ Percussion

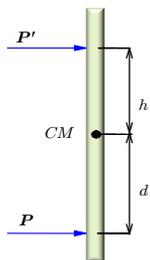


Figure 6.24 ▲ Centre de percussion.

6.6 Percussion et rotation

Dans certains cas, les forces qui agissent sur un objet peuvent être très intenses mais n'agir que pendant un temps très court (voir figure 6.22) ; on parle alors de *choc*. Il suffit de penser à la balle que frappe une raquette de tennis ou le bâton de base-ball, par exemple. Dans tous ces cas, il est opportun d'avoir recours à la deuxième loi de Newton sous forme intégrale.

Ainsi, en multipliant l'équation du mouvement

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{ext} \tag{6.53}$$

par dt et en intégrant entre les instants t_0 et t_1 , on a

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}^{ext} dt. \tag{6.54}$$

Le membre de droite est appelé *percussion*, mot qui véhicule bien l'idée de quelque chose de court.

En rotation, on a l'équivalent avec l'équation

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \quad (6.55)$$

soit

$$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\tau} dt. \quad (6.56)$$

Le deuxième membre est appelé *impulsion angulaire*.

Imaginons un objet posé sur une surface sans frottement, cet objet ayant une masse M et un rayon de giration k (voir figure 6.23). On frappe cet objet à une distance d de son centre de masse (point CM). Quel est le mouvement qui s'ensuit ?

D'après ce que nous venons de voir, l'impulsion du centre de masse Mv_{CM} sera égale à la percussion P , c'est-à-dire

$$\Delta P = \int F dt = Mv_{CM} = P. \quad (6.57)$$

De plus, l'impulsion angulaire qui en résulte sera

$$\Delta L = \int dF dt = Pd = I\omega = Mk^2\omega \quad (6.58)$$

où k est le rayon de giration et ω le changement de vitesse angulaire. Si la quantité P est connue, il sera donc possible de déterminer le mouvement de l'objet c'est-à-dire après la collision :

1. le centre de masse se déplace à la vitesse

$$v_{CM} = \frac{P}{M}$$

2. l'objet tourne avec une vitesse angulaire

$$\omega = \frac{Pd}{Mk^2} = \frac{v_{CM}d}{k^2}.$$

Posons donc un autre problème : celui d'un objet comme le précédent mais avec un point fixe O (pivot) (voir figure 6.24). Physiquement, si on y pense un peu, on se doute que si l'on applique encore une fois un choc, à une distance d du point O , il y aura vraisemblablement une réaction sur ce pivot. Or, le problème qui nous intéresse justement, c'est de savoir s'il existe une position pour le pivot pour laquelle il n'y aurait pas de réaction. C'est là, en fait, la question à laquelle font face les joueurs de base-ball ou de tennis ! L'endroit privilégié qui ne fait pas *vibrer* le poignet.

Si l'on appelle P , la percussion appliquée (par l'objet que l'on frappe, par exemple), et P' , la percussion appliquée par le pivot, en réaction, on a comme équations

$$\Delta P = P + P' = Mv_{CM}, \quad (6.59)$$

la différence d'impulsion et

$$\Delta L = \int (dF - hF') dt \quad (6.60)$$

$$= dP - hP' = Mk^2\omega, \quad (6.61)$$

la différence d'impulsion angulaire.

Petit problème ! Nous avons trop d'inconnues pour le nombre d'équations (2) : ω , P' et v_{CM} . Il faut cependant remarquer qu'il doit y avoir une relation entre ω et v_{CM} en raison du pivot. En effet, l'objet doit tourner autour du pivot ce qui signifie

$$v = \omega h. \quad (6.62)$$

On a donc tout ce qu'il faut pour trouver la valeur de P' en fonction de P

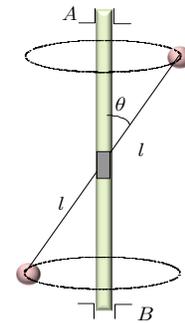


Figure 6.25 ▲ Système de deux masses ponctuelles m attachées aux extrémités d'une tige de masse négligeable et de longueur $2l$. Cette tige est plantée à un angle θ , dans un axe vertical dont les extrémités A et B sont munies de coussinets.

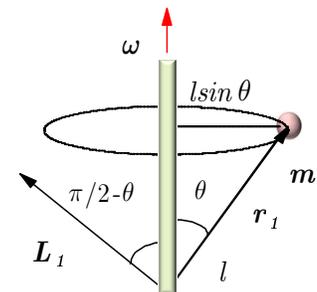


Figure 6.26 ▲ Plan supérieur de la figure précédente.

$$P + P' = Mv_{CM} = M\omega h \rightarrow \omega = \frac{P + P'}{Mh}$$

$$dP - hP' = Mk^2\omega = Mk^2\left(\frac{P + P'}{Mh}\right)$$

ou

$$P' = \frac{dh - k^2}{h^2 + k^2}P. \tag{6.63}$$

On voit que la valeur de P' est complètement déterminé par P . ce qui nous fournit le moyen de répondre à la question posée plus haut, c'est-à-dire à quel endroit la réaction sur le pivot est nulle. De toute évidence, il faut que

$$P' = 0 \implies dh - k^2 = 0 \tag{6.64}$$

ou encore

$$d = \frac{k^2}{h}. \tag{6.65}$$

Le point qui est ainsi déterminé est appelé *centre de percussion*.

6.7 Relation entre moment cinétique et vitesse angulaire

Revenons maintenant sur la relation entre le moment cinétique et la vitesse angulaire. Nous avons déjà mentionné que ces deux quantités vectorielles ne sont pas nécessairement parallèles et que

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} = \sum m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

et que dans ce cas le moment d'inertie n'est pas une quantité scalaire mais plutôt un tenseur

$$I = \begin{pmatrix} \sum m(x_2^2 + x_3^2) & -\sum mx_1x_2 & -\sum mx_1x_3 \\ -\sum mx_2x_1 & \sum m(x_1^2 + x_3^2) & -\sum mx_2x_3 \\ -\sum mx_3x_1 & -\sum mx_3x_2 & \sum m(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}. \tag{6.66}$$

La relation s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \tag{6.67}$$

Examinons le mouvement du système simple illustré ci-dessous (voir figure 6.25) et que l'on peut décrire ainsi en se rapportant à un système d'axes fixé à l'objet ; cet objet consiste en deux masses ponctuelles m attachées aux extrémités d'une tige de masse négligeable de longueur $2l$. Cette tige est fixée à un angle θ par rapport à une tige verticale dont les extrémités A et B sont maintenues en position par un roulement à bille permettant ainsi la rotation dans l'axe vertical du système.

On suppose que ce système tourne avec une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ dirigée selon l'axe Oz , entraînant une rotation des masses autour de la tige AB . On se propose de calculer le moment cinétique de ce système.

Ayant recours à la définition

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \tag{6.68}$$

nous avons pour la masse 1

$$\mathbf{L}_1 = m\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 \tag{6.69}$$

où

$$\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1$$

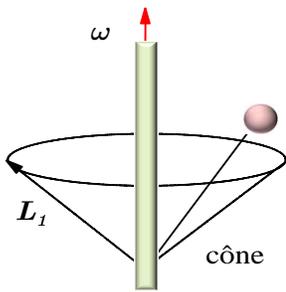


Figure 6.27 ▲
Changement de moment cinétique en fonction du temps.

(voir figure 6.26) donc \mathbf{L}_1 a pour grandeur

$$\begin{aligned} |\mathbf{L}_1| &= ml(l \sin \theta) \omega \\ &= ml^2 \omega \sin \theta. \end{aligned}$$

Ce vecteur est dans le plan des deux tiges, à un angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ de l'axe Oz . Le même calcul répété pour la masse m_2 nous donnerait un vecteur \mathbf{L}_2 de même grandeur et de même direction que \mathbf{L}_1 ce qui veut dire qu'au total, nous avons pour \mathbf{L} , un vecteur de grandeur

$$|\mathbf{L}| = 2ml^2 \omega \sin \theta$$

dans le plan yOz (le plan qui contient les deux tiges) et dont la direction forme un angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ avec l'axe Oz . Si nous prenons la composante de ce vecteur selon l'axe Oz , nous avons

$$\begin{aligned} L_z &= |\mathbf{L}| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= 2ml^2 \omega \sin^2 \theta \end{aligned}$$

ou encore

$$L_z = 2m(l \sin \theta)^2 \omega$$

où la quantité $2m(l \sin \theta)^2$ est tout simplement le moment d'inertie autour de l'axe Oz et nous retombons sur un résultat déjà rencontré précédemment. Il y a cependant quelque chose ici de nouveau. À première vue, le moment cinétique semble constant, mais ce n'est pas le cas. En fait, il ne faut pas oublier que nous l'avons calculé dans un repère lié à l'objet ; il ne faut pas oublier que cet objet (la tige et les deux masses) tourne à la vitesse ω autour de Oz , ce qui veut dire que le vecteur \mathbf{L} varie dans le temps en direction et balaie un cône autour de cet axe (voir figure 6.27).

En conclusion, si on applique l'équation

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (6.70)$$

on en déduit qu'il faut exercer un moment de force sur ce système. C'est là, en effet, le rôle roulement à bille en A et B mentionnés au début. En effet, examinons quelle est la direction du vecteur $\boldsymbol{\tau}$.

Comme $\boldsymbol{\tau}$ n'a pas de composante selon Oz ($L_z = \text{cte}$), il est dans le plan xOy . Voyons comment varie \mathbf{L} pendant un court intervalle dt (voir figure 6.28). Le vecteur $d\mathbf{L}$ a comme grandeur

$$|d\mathbf{L}| = (L \cos \theta) d\varphi \quad (6.71)$$

$$= (L \cos \theta) \omega dt \quad (6.72)$$

et une direction perpendiculaire à \mathbf{L} et $\boldsymbol{\omega}$, ce qui signifie que les forces qui exercent le couple $\boldsymbol{\tau}$ sont les suivantes (toujours à cet instant) une force selon Ox au point A , une force de même grandeur, mais en direction opposée, au point B .

Si on veut connaître la grandeur de $\boldsymbol{\tau}$, il suffit de remplacer L par sa valeur dans la relation précédente, soit

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{|d\mathbf{L}|}{dt} = (L \cos \theta) \frac{d\varphi}{dt} = \omega L \cos \theta \\ &= 2ml^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Avant de passer à une application pratique de ce que nous venons de voir, il est important de faire le constat suivant : Dans ce système, la relation entre \mathbf{L} et $\boldsymbol{\omega}$ n'est pas de nature scalaire, c'est-à-dire, comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, le vecteur \mathbf{L} n'est pas, en général, parallèle à $\boldsymbol{\omega}$.

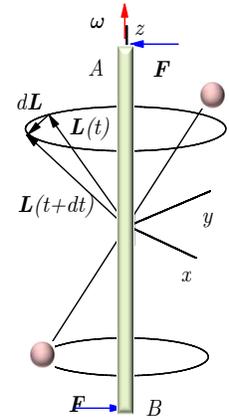


Figure 6.28 ▲ Variation du moment cinétique \mathbf{L} et moments de force exercés sur la tige.

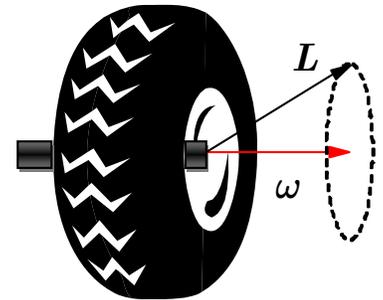


Figure 6.29 ▲ Section efficace d'une roue d'automobile: Une roue n'est pas « balancée » lorsque son moment cinétique \mathbf{L} n'est pas parallèle à sa vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$.

En fait, l'inertie s'exprime plutôt par un tenseur que par un scalaire. *Par rapport à un point donné*, tout corps possède trois axes mutuellement perpendiculaires privilégiés : quand la rotation d'un corps se fait autour de l'un de ces axes, alors \mathbf{L} est parallèle à $\boldsymbol{\omega}$. On appelle ces axes : *axes principaux* (par rapport à ce point). Dans tous les cas rencontrés avant ce paragraphe, nous avons toujours affaire à des axes principaux : en effet, lorsqu'un corps a une certaine symétrie, les axes de symétrie coïncident sont des axes principaux. Ainsi, pour un cylindre, par exemple, l'axe de révolution est un axe de symétrie, donc un axe principal ; deux autres axes mutuellement perpendiculaires, ainsi que l'axe de révolution, viendront compléter l'ensemble des axes principaux.

Dans le cas du système étudié depuis le début du paragraphe, les axes principaux seraient : l'axe qui passe par la tige et les deux masses et deux axes perpendiculaires à cette tige. Ici, ces derniers axes sont dits dégénérés puisqu'ils sont laissés entièrement à notre choix. C'est toujours le cas lorsqu'il y a symétrie de révolution.

Exemple 6.6

Équilibrage des roues d'une automobile

L'opération qui consiste à équilibrer les roues d'une automobile se fait en deux étapes, dont la première est l'*équilibrage statique*. Il s'agit de s'assurer que le centre de masse du pneu coïncide avec l'axe de rotation. Si le pneu est placé sur un axe horizontal très sensible, il devrait rester immobile quelle que soit sa position angulaire sur l'axe ; s'il tend à tourner pour se placer dans une position privilégiée, c'est que son centre de masse est en dehors de l'axe, ce qu'on corrige en ajoutant une masse à l'opposé.

On peut ensuite procéder à l'équilibrage dynamique qui consiste, en fait, à corriger la différence de parallélisme entre le moment cinétique de la roue et l'essieu (axe de rotation) (voir figure 6.29). Pour cette opération qui nécessite que l'on fasse tourner la roue, il s'agit de détecter s'il s'exerce un couple de force sur l'axe pendant la rotation de la roue. Si c'est le cas, c'est que \mathbf{L} n'est pas parallèle à $\boldsymbol{\omega}$. On corrige la situation cette fois à l'aide de deux masses de même grandeur placées d'un côté et de l'autre de la roue mais dans des positions diamétralement opposées. On arrive ainsi à faire de l'axe de la roue, un axe principal d'inertie.

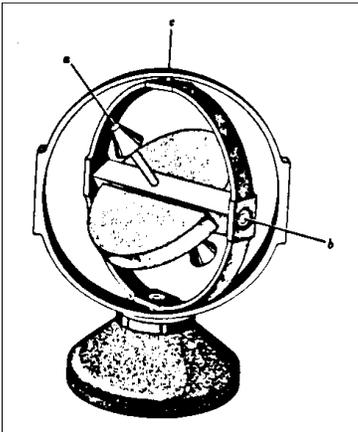


Figure 6.30 ▲
Le gyroscope.

6.8 Introduction au gyroscope

Un gyroscope est un dispositif pour mesurer ou maintenir l'orientation, basé sur les principes de la conservation du moment cinétique. Le premier gyroscope fut l'oeuvre de Johann Bohnenberger en 1817, bien qu'à l'époque, il l'ait appelé simplement la « machine ». Puis Laplace, en recommanda l'usage comme aide pédagogique. C'est ainsi que le gyroscope fut porté à l'attention de Léon Foucault. En 1852, Foucault l'utilise dans une expérience portant sur la rotation de la terre. C'est à Foucault qu'on doit le nom de gyroscope, qui le fabriqua pour une expérience visant à voir (du grec skopeein) la rotation de la terre (gyros pour cercle ou rotation). L'expérience ne fut pas un succès à cause du frottement qu'il n'arriva pas à contrôler et qui limitait chaque mesure à 8 à 10 min minutes, temps trop court pour observer un déplacement significatif de l'axe de rotation.

Il est bien entendu que nous ne ferons, ici, qu'effleurer le sujet étant connu que le gyroscope peut faire l'objet de traités de plusieurs centimètres d'épaisseur.

Pour le physicien, le gyroscope (voir la figure 6.30) dans sa plus simple expression, est un solide indéformable de symétrie axiale, en mouvement de rotation autour de cet axe et libre de se déplacer angulairement dans n'importe laquelle direction autour de son centre de masse.

Dans la pratique, le gyroscope est formé par un disque ou une roue (anneau) installé dans une monture à cadran qui permet, justement, la liberté de mouvement dans toutes les directions.

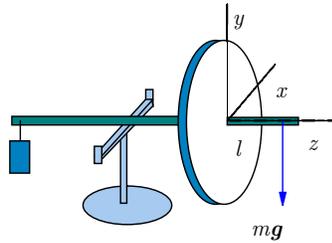


Figure 6.31 ◀▶
Exemple de gyroscope simple.

Si le gyroscope est bien équilibré, c'est-à-dire si son centre de masse est exactement au centre de la suspension, aucun moment de force ne s'exerce sur lui de telle sorte que son moment cinétique doit *demeurer constant*. Ainsi, si on pointe l'axe vers une étoile, par exemple, il demeurera dans cette direction. Il ne faut cependant pas oublier que la Terre tourne, ce qui signifie que par rapport à la Terre, son orientation paraîtra changer au cours du temps. On sait que le gyroscope est utilisé comme gyrocompas dans les systèmes de guidage par sa propriété de conserver sa position par rapport aux étoiles.

On peut se poser la question : Pourquoi utiliser un gyroscope puisqu'un solide indéformable installé dans la même suspension, mais ne tournant pas, indiquerait toujours, lui aussi, la même direction ? Il suffit d'expérimenter un peu avec un gyroscope pour se rendre compte que même si on lui applique une petite perturbation, un petit choc, par exemple, sa direction ne changera à peu près pas. Il n'en serait pas de même de notre solide non tournant qui, lui, verrait son orientation changer indéfiniment, s'il n'y a pas de frottement dans la suspension.

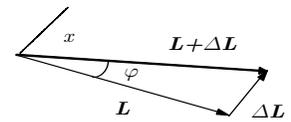


Figure 6.32 ▲
Variation du moment cinétique causé par le moment de force.

6.8.1 Gyroscope soumis à un moment de force constant

Supposons maintenant que l'on exerce un moment de force en attachant, par exemple, une masse sur l'axe de rotation (voir figure 6.31). Nous allons utiliser des axes choisis ainsi : l'axe Oz selon l'axe de rotation et les axes Ox et Oy dans le plan du disque, l'axe Oy étant opposé à la force qui s'exerce sur l'axe, c'est-à-dire que

$$\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{e}_y \quad (6.73)$$

ce qui donne un moment de force

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_g \\ &= mgl\mathbf{e}_x. \end{aligned}$$

En raison de l'action de ce moment de force pendant un intervalle de temps Δt , le moment cinétique \mathbf{L} du gyroscope va subir un changement

$$\Delta\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau}\Delta t = mgl\Delta t\mathbf{e}_x \quad (6.74)$$

et si l'on examine la figure 6.32, on voit que l'on peut aussi écrire que

$$\Delta\mathbf{L} = |\mathbf{L}|\Delta\varphi\mathbf{e}_x \quad (6.75)$$

où $\Delta\varphi$ est un angle de rotation autour de l'axe parallèle à Oy . Comme $|\mathbf{L}| = I\omega$, on a en combinant les équations (6.74) et (6.75)

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{1}{|\mathbf{L}|} \left| \frac{\Delta\mathbf{L}}{\Delta t} \right| = \frac{\tau}{I\omega} = \frac{mgl}{I\omega} \quad (6.76)$$

et cette quantité, une vitesse angulaire selon l'axe Oy , que nous appellerons Ω est la *précession* (lente) du gyroscope. Il existe aussi une précession dite rapide, mais c'est habituellement la *précession* lente qui est observée.

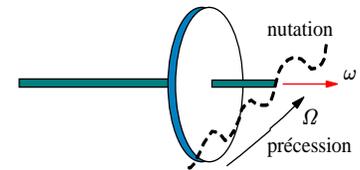


Figure 6.33 ▲
Mouvement de précession et de nutation du gyroscope simple.

À ce mouvement de précession peut se superposer une oscillation de l'axe du gyroscope. C'est ce qu'on appelle la *nutaton* (voir figure 6.33).

Si on combine le mouvement de précession à celui de la nutation, il est possible d'observer trois situations représentées à l'aide de figures simples (voir figure 6.34). La sphère correspond à toutes les positions que peut occuper la pointe du gyroscope alors que la trajectoire de la pointe est illustrée par les courbes. On a alors les trois sphères de la figure 6.34 suivant que la nutation est lente (aucun recul, aucun arrêt), rapide (mouvement de recul) et optimale (arrêt) par rapport à la précession respectivement.

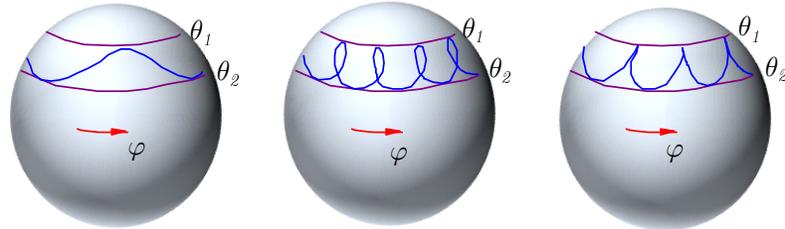


Figure 6.34 ◀▶
Mouvement du gyroscope en nutation.

Références 6.1

-  Le gyroscope en action :
Roue de bicyclette : <http://www.youtube.com/watch?v=8H98BgRzpOM&feature=related>
- Gyroscope : http://www.youtube.com/watch?v=cquvA_IpEsA&feature=related

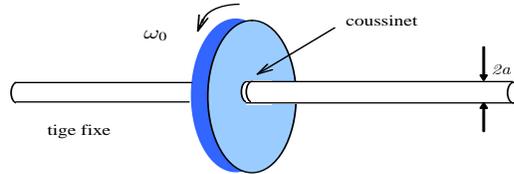
6.8.2 Précession des équinoxes

En raison du fait que la Terre n'est pas sphérique et que de plus elle est penchée sur son orbite, la force exercée par le Soleil et aussi par la Lune, mais à un degré moindre, n'a pas la même grandeur sur la portion du renflement proche du Soleil que sur la portion éloignée, la distance de chaque portion au Soleil n'étant pas la même. Ceci crée un moment de force sur la Terre et entraîne un mouvement de précession nommé *précession des équinoxes*. Sa période est d'environ 26 000 années.

- (a) À quelle hauteur de la base se trouve le centre de masse ?
- (b) Quel est le moment d'inertie de ce cône par rapport à son axe de symétrie ?

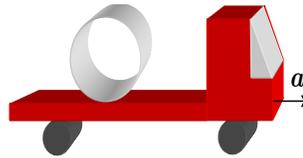
6.5 Roue en rotation

Une roue de masse M , rayon de giration k est en rotation autour d'un axe horizontal fixe de rayon a (voir figure 6.38). Le contact entre la roue et la tige est assuré par un coussinet caractérisé par un coefficient de frottement μ . Si la vitesse angulaire initiale de la roue est ω_0 , combien de tours la roue effectuera-t-elle avant de s'arrêter ?

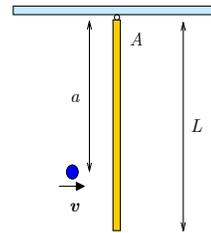


6.6 Problème pour un camionneur

Un lourd tuyau de béton de masse M et de rayon R repose transversalement sur la plate-forme d'un camion, arrêté à un feu de circulation (voir figure 6.39). Un petit malin en profite pour enlever les cales qui devaient empêcher le cylindre de rouler. Le chauffeur démarre avec une accélération a . Quelle est l'accélération par rapport au camion ?



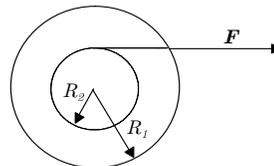
6.7 Percussion



Une tige de longueur L et de masse M est suspendue par un pivot sans friction en un point A (voir figure 6.40). Un projectile de masse m et de vitesse v frappe la tige à une distance a du pivot. Le projectile s'arrête dans la tige.

- (a) Quel est le moment cinétique du système autour du point A juste avant et après la collision du projectile avec la tige ?
- (b) Déterminez l'impulsion du système juste avant et juste après la collision.

6.8 Un deuxième yo-yo



Un yo-yo est posé sur le sol. Il a une masse de 2 kg , un rayon intérieur $R_2 = 0.03\text{ m}$ et un rayon extérieur $R_1 = 0.05\text{ m}$ (voir figure 6.41). Le rayon de giration autour de l'axe central est de 0.04 m . Une force constante de 5 N est appliquée à l'aide d'un fil de masse négligeable enroulé autour du cylindre intérieur.

Figure 6.38 ◀▶ Schéma de la situation décrite au problème 6.5

Figure 6.39 ◀▶ Schéma de la situation décrite au problème 6.6

Figure 6.40 ◀▶ Schéma de la situation décrite au problème 6.7

Figure 6.41 ◀▶ Schéma de la situation décrite au problème 6.8

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- A
- B
- C
- i

Figure 6.43 ◀▶
Schéma de la situation décrite au problème 6.17

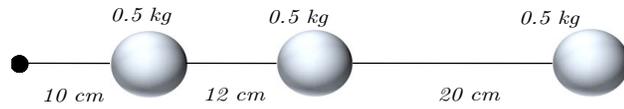


Figure 6.44 ◀▶
Schéma de la situation décrite au problème 6.18

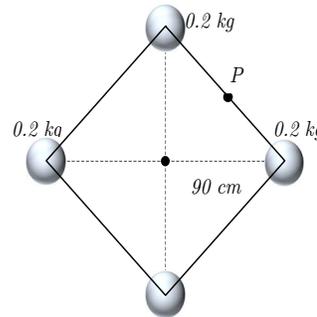
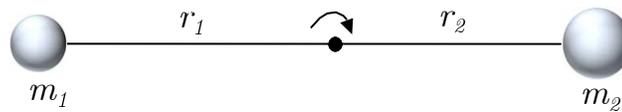


Figure 6.45 ◀▶
Schéma de la situation décrite au problème 6.19



l'impact.

- (b) Déterminer la vitesse minimum v_{\min} que la balle doit posséder pour permettre un tour complet à la masse M .

6.16 **Sphère et plans inclinés**

Une sphère creuse de masse m et de rayon R part au repos sur un premier plan incliné à une altitude h_1 . La sphère roule sans glissement jusqu'à un second plan incliné débutant à une hauteur h_2 , possédant une surface lisse sans frottement et faisant un angle $\theta_2 = \pi/4$ avec l'horizon.

- (a) Quelles sont les vitesses angulaires $\omega_{1,2}$ et linéaires $v_{1,2}$ à la sortie des deux plans ?
- (b) Après le second plan se trouve une falaise de profondeur h_3 . La boule tombe dans le vide avant de toucher le sol sans perte d'énergie et de continuer à rouler sans glissement. À quelle distance horizontale x_3 la sphère touche-t-elle le sol ?
- (c) Quelles sont alors ses vitesses angulaire ω_3 et linéaire v_3 ?

6.17 **Moment d'inertie**

Trouvez le moment d'inertie de la figure 6.43.

6.18 **Moment d'inertie**

Trouvez le moment d'inertie de la figure 6.44 pour un axe :

- (a) passant par le centre de la figure.
- (b) passant sur une tige (point P)

6.19 **Moment d'inertie**

Deux masses tournent autour d'une tige légère (voir figure 6.45). Trouvez le moment d'inertie autour du pivot.

6.20 **Roulement sans glissement**

On lance une boule sur un plan, et on remarque qu'elle glisse sans rouler. Prouver qu'elle roulera sans glisser lorsque sa vitesse atteindra $\sqrt{\frac{5}{7}}$ de sa vitesse initiale.

6.21 **Un homme sur un disque**

Un immense disque ayant un moment d'inertie de $1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ fait un tour en 10 s . Un homme pesant 80 kg qui était initialement au centre décide de s'en éloigner de 2 m . Quel est la nouvelle vitesse du disque ?

6.22 **Le ralentissement**

Expliquez pourquoi une sphère qui roule sans glisser sur un plan décélère. (le frottement de l'air est négligeable)

6.23 Un petit train électrique

Un petit train électrique est posé sur le bord d'une plate-forme circulaire de rayon r et de masse m . La plate-forme peut tourner autour d'un axe central vertical sans frottement. Quelle doit être la masse du train pour qu'il reste fixe par rapport au sol peu importe sa vitesse ?

6.24 Un enfant sur une table tournante

Un enfant se tient sur une table tournante (la masse de la table est de 15 kg), tenant dans ses mains une roue ($I = 0.22 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$) qui tourne à 200 tours par minute dans un axe vertical. Trouvez la masse de l'enfant en sachant que lorsqu'il change l'orientation de la roue de l'axe vertical à un axe horizontal, il se met à tourner avec la table à 20 tours par minute. (considérez l'enfant et la table tournante comme un tout représenté par un cylindre uniforme de 30 cm de diamètre).

6.25 Migration

Si toute la population mondiale décidait d'aller vivre dans le grand nord, est ce que la durée du jour serait affectée. si oui, de quelle manière ?

6.26 Affaissement du Soleil

Si pour une raison inconnue, le Soleil manquait de carburant et se contractait pour devenir une naine blanche d'environ de la dimension de la Terre, quelle serait sa nouvelle période de rotation ? (la période de rotation actuelle du soleil est de 25 jours.)

6.27 Une tige mince

Une tige mince de masse m et de longueur l repose sur une table lisse. On frappe la tige à l'une de ses extrémités avec une impulsion p perpendiculairement à la longueur de celle-ci. Lorsque la tige a tournée une fois bout pour bout, de quelle distance son centre s'est-il éloigné de sa position initiale ?

6.28 Môme tige mince trouée

On perce un trou dans le centre de la tige du problème précédent pour laisser passer une longue vis (voir figure 6.46). La vis à un pas P (le pas est la distance longitudinale que parcourt la vis lorsqu'on lui fait faire un tour). La tige trouée a un moment d'inertie I , et sa masse reste à peu près la même. Si il n'y a pas de friction entre la tige et la vis, trouvez l'accélération verticale de la tige.

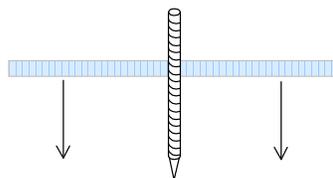


Figure 6.46 ◀▶

Schéma de la situation décrite au problème 6.28

6.29 Balle sur une pente

On laisse rouler une balle d'une pente (voir figure 6.47). On remarque qu'elle roule sans glisser. Trouvez sa vitesse finale.

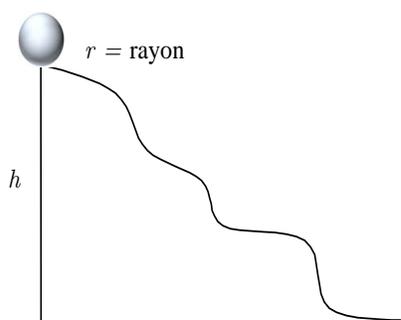


Figure 6.47 ◀▶

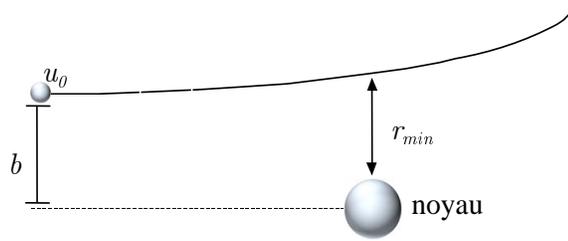
Schéma de la situation décrite au problème 6.29

6.30 Une particule α

Une particule α (noyau d'hélium) de masse m , s'approche d'un noyau fixe avec une vitesse u en suivant une courbe qui s'écarte initialement d'une distance b de la droite qui mènerait à une collision frontale (voir figure 6.48). La force présente est une force centrale (c'est-à-dire elle agit sur la droite qui joint la particule au noyau). L'énergie potentielle est de type $U(r) = C/r$, où C est une constante.

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- A
- B
- C
- i

Figure 6.48 ◀
Schéma de la situation décrite au problème 6.30



- (a) Le moment cinétique est-il conservé ?
- (b) Quelle est la distance d'approche la plus courte (r_{min}) ?

6.31 Moment d'inertie

Trouvez le moment d'inertie d'un disque pesant 2 kg et ayant un rayon de 30 cm , mais dans lequel on a percé un trou de 10 cm de rayon dont le centre est à 15 cm du centre du disque.

6.32 Un enfant sur un carrousel

Un enfant tout excité à la vue d'un petit carrousel décide de sauter dessus. L'enfant pèse 40 kg , le carrousel en pèse 80 . On peut considérer ce dernier comme un cercle de 2 m de rayon et tournant à 2 rad/s .

- (a) Si l'enfant atterrit sur le bord du carrousel, à quelle vitesse tournera-t-il ?
- (b) Que pourrait faire l'enfant pour que le carrousel tourne plus vite sans débarquer ?

6.33 Un disque de rayon R

Un disque de rayon R et d'épaisseur h a une densité qui varie selon le rayon. La relation donnant la densité à une distance r du centre est : $\rho = \rho_0 r/R$

- (a) Quel est la masse totale du disque ?
- (b) Calculer le moment d'inertie du disque.

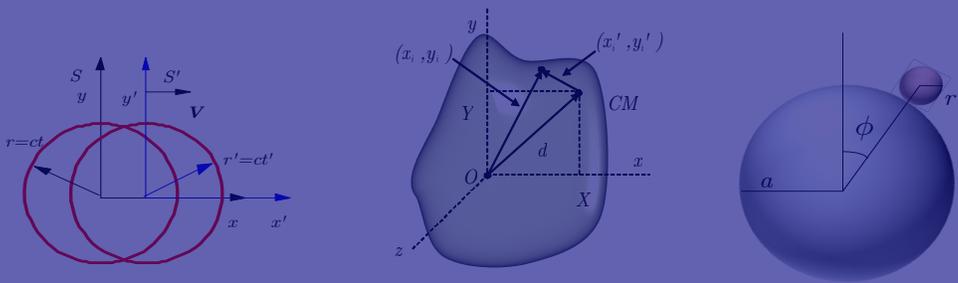
6.34 Jeu de ballon

Vous avez peut-être déjà vu un jeu où deux adversaires se placent face à face de chaque côté d'un poteau sur lequel un ballon pend attaché au bout d'une corde. Le but de ce jeu est d'enrouler le ballon autour du poteau vers sa droite. Considérons le cas où un des deux adversaires profite de la distraction de l'autre pour frapper le ballon et lui fait faire 5 tours consécutifs. Trouvez la vitesse angulaire du ballon après le cinquième tour. La longueur initiale de la corde est l , le rayon du poteau est a ($a \ll l$), on considère que le ballon a une vitesse initiale v_0 et qu'il tourne dans le plan horizontal uniquement.



A

Notations, unités et constantes de physique,...



Annexe A

A.1	Notations	151
A.2	Unités SI	152
A.3	Facteurs de conversion	153
A.4	Unités naturelles	154
A.5	Unités de Lorentz-Heaviside	155
A.6	Constantes fondamentales de physique	155
A.7	Systèmes de coordonnées	157

A.1 Notations

Dans cet ouvrage, un certain nombre de conventions ont été adoptées pour faciliter la lecture. Les vecteurs à trois dimensions sont notés par des caractères gras

$$\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{F}, \dots$$

La dérivée totale d'une quantité A par rapport au temps est aussi souvent représentée par

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A}, \quad \frac{d^2A}{dt^2} = \ddot{A}, \dots$$

En relativité restreinte, par exemple, on utilise la notation quadrivectorielle où les quadrivecteurs sont dénotés par

$$x, p, \dots$$

dont les composantes contravariantes sont

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}) \\ p^\mu &= (p^0, p^1, p^2, p^3) = (p^0, \mathbf{p}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

alors que les composantes contravariantes s'écrivent

$$\begin{aligned} x_\mu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -\mathbf{x}) \\ p_\mu &= (p_0, p_1, p_2, p_3) = (p^0, -\mathbf{p}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

L'alphabet grec est utilisé fréquemment:

Alphabet Grec					
Majuscule	Minuscule	Prononciation	Majuscule	Minuscule	Prononciation
A	α	alpha	N	ν	nu
B	β	bêta	Ξ	ξ	xi
Γ	γ	gamma	O	o	omicron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
E	ϵ, ε	epsilon	P	ρ	rho
Z	ζ	zêta	Σ	σ	sigma
H	η	êta	T	τ	tau
Θ	θ, ϑ	thêta	Υ	υ	upsilon
I	ι	iota	Φ	ϕ, φ	phi
K	κ	kappa	Ψ	ψ	psi
Λ	λ	lambda	X	χ	khi
M	μ	mu	Ω	ω, ϖ	oméga

A.2 Unités SI

Les lettres SI désignent le Système International d'unités. Il s'agit d'un système d'unités cohérentes approuvé internationalement qui est en usage dans plusieurs pays et utilisé de façon systématique pour les ouvrages scientifiques et techniques. Le système SI, basé sur les unités MKS, remplace les systèmes CGS et f.p.s. (Système Impérial). On peut diviser les unités SI en trois groupes: les unités de base, supplémentaires et dérivées. Il y a sept unités de base qui sont dimensionnellement indépendantes.

Unités de base SI		
Quantité Physique	Nom	Symbole
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Courant électrique	ampère	A
Température	kelvin	K
Quantité de matière	mole	mol
Intensité lumineuse	candela	cd

Unités supplémentaires SI		
Quantité Physique	Nom	Symbole
Angle plan	radian	rad
Angle solide	stéradian	sr

Unités dérivées SI			
Quantité Physique	Nom	Symbole	Unités SI
Fréquence	hertz	Hz	s^{-1}
Énergie	joule	J	Nm
Force	newton	N	$kg\,ms^{-2}$
Puissance	watt	W	$J\,s^{-1}$
Pression	pascal	Pa	$N\,m^{-2}$
Charge électrique	coulomb	C	As
Différence de potentiel électrique	volt	V	$W\,A^{-1}$
Résistance électrique	ohm	Ω	$V\,A^{-1}$
Conductance électrique	siemens	S	$A\,V^{-1}$
Capacité électrique	farad	F	$C\,V^{-1}$
Flux magnétique	weber	Wb	Vs
Inductance	henry	H	$W\,b\,A^{-1}$
Induction magnétique	tesla	T	$W\,b\,m^{-2}$
Flux lumineux	lumen	lm	cdsr
Illumination	lux	lx	$lm\,m^{-2}$
Activité	becquerel	Bq	s^{-1}
Dose absorbée	gray	Gy	$J\,kg^{-1}$
Dose équivalente	sievert	Sv	$J\,kg^{-1}$

Les unités SI sont étendues grâce à des préfixes qui désignent les multiples ou fractions décimales des unités.

Préfixes utilisés avec unités SI					
Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole
10	déca-	da	10^{-1}	déci-	d
10^2	hecto-	h	10^{-2}	centi-	c
10^3	kilo-	k	10^{-3}	milli-	m
10^6	méga-	M	10^{-6}	micro-	μ
10^9	giga-	G	10^{-9}	nano-	n
10^{12}	tera-	T	10^{-12}	pico-	p
10^{15}	peta-	P	10^{-15}	femto-	f
10^{18}	exa-	E	10^{-18}	atto-	a

A.3 Facteurs de conversion

	Pour convertir de	en	Multiplier par
Activité	curie (Ci)	becquerel (Bq)	$3.7 \times 10^{10} \text{ Bq Ci}^{-1}$
Aire	acre	m^2	$4046.873 \text{ m}^2 \text{ acre}^{-1}$
Énergie	B.T.U. (Btu)	joule (J)	$1055.056 \text{ J Btu}^{-1}$
	kilocalorie (kcal)	joule (J)	4186 J kcal^{-1}
	erg (erg)	joule (J)	$1.0 \times 10^{-7} \text{ J erg}^{-1}$
	électron volt (eV)	joule (J)	$1.60219 \times 10^{-19} \text{ J eV}^{-1}$
Force	dyne (dyn)	newton (N)	$.00001 \text{ N dyn}^{-1}$
	livre (lbf)	newton (N)	$4.44822 \text{ N lbf}^{-1}$
Luminosité	pied chandelle (fc)	lux (lx)	$10.76391 \text{ lx fc}^{-1}$
	phot (phot)	lux (lx)	$10000.0 \text{ lx phot}^{-1}$
Longueur	ångström (Å)	mètre (m)	$1.0 \times 10^{-10} \text{ m Å}^{-1}$
	pied (ft)	mètre (m)	$.3048 \text{ m ft}^{-1}$
	pouce (in)	mètre (m)	$.0254 \text{ m in}^{-1}$
	mile (mi)	mètre (m)	$1609.344 \text{ m mi}^{-1}$
	année-lumière (al)	mètre (m)	$9.461 \times 10^{15} \text{ m al}^{-1}$
	mégaparsec (Mpc)	mètre (m)	$3.086 \times 10^{22} \text{ m Mpc}^{-1}$
Flux magnétique	maxwell (Mx)	weber (Wb)	$1.0 \times 10^{-8} \text{ Wb Mx}^{-1}$
Champ magnétique	gauss (G)	tesla (T)	$1.0 \times 10^{-4} \text{ T G}^{-1}$

	Pour convertir de	en	Multiplier par
Masse	u.m.a. (u)	kilogramme (kg)	$1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg u}^{-1}$
	u.m.a. (u)	MeV (MeV)	$931.4868 \text{ MeV u}^{-1}$
Angle plan	degré (°)	radian (rad)	$1.745329 \times 10^{-2} \text{ rad}/^\circ$
	minute (')	radian (rad)	$2.908882 \times 10^{-4} \text{ rad}'$
	seconde (")	radian (rad)	$4.848137 \times 10^{-6} \text{ rad}''$
Puissance	horsepower (hp)	watt (W)	$745.69987 \text{ W hp}^{-1}$
	atmosphère (atm)	pascal (Pa)	$101325 \text{ Pa atm}^{-1}$
Pression	bar (bar)	pascal (Pa)	$1.0 \times 10^5 \text{ Pa bar}^{-1}$
	torr (torr)	pascal (Pa)	$133.322 \text{ Pa torr}^{-1}$
Température	Celsius (°C)	kelvin (K)	$T_K = T_C + 273.15$
	Fahrenheit (°F)	Celsius (°C)	$T_F = (T_C - 32) / 1.8$
	Fahrenheit (°F)	kelvin (K)	$T_K = (T_F + 459.67) / 1.8$
Temps	an (a)	seconde (s)	$3.153600 \times 10^7 \text{ s a}^{-1}$
	jour (j)	seconde (s)	86400 s j^{-1}
	heure (h)	seconde (s)	3600 s h^{-1}
	minute (min)	seconde (s)	60 s min^{-1}
Volume	gallon US (gal)	m^3	$3.785412 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ gal}^{-1}$
	litre (l)	m^3	$1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ l}^{-1}$
	pinte (pint)	m^3	$9.463529 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ pint}^{-1}$

A.4 Unités naturelles

Les unités naturelles (UN) sont définies de façon à ce que les constantes fondamentales que sont la constante de Planck et la vitesse de la lumière soient

$$\begin{aligned}\hbar &= 1 \\ c &= 1.\end{aligned}$$

Elles sont utiles dans les systèmes physiques relativistes et/ou qui impliquent des effets quantiques mesurables.

Une quantité dans les unités SI (système international) qui possède des dimensions

$$E^p L^q T^r$$

où x est un nombre pur devant E , L et T qui représentent les unités d'énergie (en Joules), longueur (en mètres) et temps (en secondes) respectivement, aura des unités d'énergie à la puissance $p - q - r$, soit E^{p-q-r} dans le SUN. La conversion du SI au SUN procède comme suit. Si dans le SI E , L et T représentent les unités de masse, longueur et temps

$$\begin{aligned}[E^p L^q T^r]_{\text{SUN}} &= \left[E^p \left(\frac{L}{\hbar c} \right)^q \left(\frac{T}{\hbar} \right)^r \right]_{\text{SI}} = \left[\frac{E^p L^q T^r}{c^q \hbar^{q+r}} \right]_{\text{SI}} \\ &= [E^p L^q T^r]_{\text{SI}} \cdot (6.24 \times 10^{-12} \text{ MeV}^{-1} \text{ J}^{-1})^p \\ &\quad \cdot (5.1 \times 10^{12} \text{ MeV}^{-1} \text{ m}^{-1})^q \cdot (1.52 \times 10^{21} \text{ MeV}^{-1} \text{ s}^{-1})^r\end{aligned}$$

où les quantités dans les crochets $[A]_{\text{SUN}}$ et $[A]_{\text{SI}}$ sont respectivement en unités SUN et SI.

Quantité	SI			SUN
	p	q	r	$n = p - q - r$
Action	1	2	-1	0
Vitesse	0	1	-1	0
Masse	1	0	0	1
Longueur	0	1	0	-1
Temps	0	0	1	-1
Impulsion	1	1	-1	1
Énergie	1	2	-2	1
Const. structure fine α_{em}	0	0	0	0
Const. de Fermi	1	5	-2	-2

A.5 Unités de Lorentz-Heaviside

Dans les unités SI, la charge électrique est exprimée en Coulombs, unité distincte qui est additionnelle aux unités «mécaniques» (masse, longueur, temps), bien que la définition traditionnelle de l'ampère se réfère à certaines de ces autres unités. Dans les systèmes unitaires naturels, cependant, la charge électrique a des unités de

$$[E]^{1/2} [L]^{3/2} [T]^{-1}$$

Il existe deux systèmes d'unité naturels principaux pour l'électromagnétisme:

- Unités de Lorentz-Heaviside (classées comme système rationalisé d'unités d'électromagnétisme).
- Gaussiennes (classées comme système non rationalisé d'unités d'électromagnétisme).

Parmi celles-ci, Lorentz-Heaviside est un peu plus commune, principalement parce que les équations de Maxwell sont plus simples dans les unités de Lorentz-Heaviside qu'elles ne le sont dans les unités gaussiennes.

Dans les deux systèmes unitaires, la charge élémentaire e satisfait:

$$e = \sqrt{4\pi\alpha_{em}\hbar c} \quad (\text{Lorentz-Heaviside}),$$

$$e = \sqrt{\alpha_{em}\hbar c} \quad (\text{Gaussien})$$

où \hbar est la constante de Planck réduite, c est la vitesse de la lumière, et la quantité adimensionnelle

$$\alpha_{em} = \frac{1}{137.0360}$$

est la constante de structure fine.

Dans un système unitaire naturel où $c = 1$, les unités de Lorentz-Heaviside peuvent facilement être dérivées des unités SI en posant $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$.

A.6 Constantes fondamentales de physique

A.6.1 Constantes universelles

Quantité	Symbole	Valeur
Vitesse de la lumière (vide)	c	$2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Perméabilité du vide	μ_0	$1.25664 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
Permittivité du vide ($1/\mu_0 c^2$)	ϵ_0	$8.854187817 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
Constante gravitationnelle	G, κ	$6.67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Constante de Planck	h	$6.62606957 \times 10^{-34} \text{ J s}$
en électron volts		$4.135669 \times 10^{-15} \text{ eV s}$
$h/2\pi$	\hbar	$1.05457266 \times 10^{-34} \text{ J s}$
en électron volts		$6.58211928 \times 10^{-16} \text{ eV s}$
Masse de Planck ($(\hbar c/G)^{\frac{1}{2}}$)	m_P	$2.17671 \times 10^{-8} \text{ kg}$
Longueur de Planck ($(\hbar G/c^3)^{\frac{1}{2}}$)	l_P	$1.61605 \times 10^{-35} \text{ m}$
Temps de Planck ($(\hbar G/c^5)^{\frac{1}{2}}$)	t_P	$5.39056 \times 10^{-44} \text{ s}$

A.6.2 Constantes électromagnétiques

Quantité	Symbole	Valeur
Charge de l'électron	e	$1.602176565 \times 10^{-19} \text{ C}$
Rapport e sur h	e/h	$2.41798836 \times 10^{14} \text{ A J}^{-1}$
Quantum de flux magnétique ($h/2e$)	Φ_0	$2.06783461 \times 10^{-15} \text{ Wb}$
Ratio fréquence-voltage Josephson	$2e/h$	$4.8359767 \times 10^{14} \text{ Hz V}^{-1}$
Conductance Hall quantique	e^2/h	$3.87404614 \times 10^{-5} \text{ S}$
Résistance Hall quantique ($\mu_0 c/2\alpha_{em}$)	R_H	25812.8056Ω
Magnéton de Bohr	μ_B	$9.2740154 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$
en électron volts		$5.78838263 \times 10^{-5} \text{ eV T}^{-1}$
Magnéton nucléaire (1 nm)	μ_N	$5.0507866 \times 10^{-27} \text{ J T}^{-1}$
en électron volts		$3.15245166 \times 10^{-8} \text{ eV T}^{-1}$

A.6.3 Constantes astronomiques

Quantité	Symbole	Valeur
Masse du Soleil	M_\odot	$1.98843 \times 10^{30} \text{ kg}$
Rayon du Soleil	R_\odot	$6.9599 \times 10^8 \text{ m}$
Masse de la Terre	M_\oplus	$5.97223 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon de la Terre (équateur)	R_\oplus	$6.378164 \times 10^6 \text{ m}$
Rayon de la Terre (pôle)		$6.356 \times 10^6 \text{ m}$
Masse de la Lune		$7.349 \times 10^{22} \text{ kg}$
Rayon de l'orbite lunaire		$3.844 \times 10^8 \text{ m}$
Pression atmosphérique standard		101325 Pa

A.6.4 Constantes atomiques

Quantité	Symbole	Valeur
Structure fine ($\mu_0 c e^2/2h$)	α_{em}	$7.29735308 \times 10^{-3}$
	α_{em}^{-1}	137.0359895
Constante de Rydberg	R_∞	$1.0973731534 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$
en hertz		$3.2898419499 \times 10^{15} \text{ Hz}$
en joules		$2.1798741 \times 10^{-18} \text{ J}$
en électron volts		13.6056981 eV
Rayon de Bohr ($\alpha_{em}/4\pi R_\infty$)	a_0	$0.529177249 \times 10^{-10} \text{ m}$
Énergie de Hartree	E_h	$4.3597482 \times 10^{-18} \text{ J}$
en électron volts		27.2113961 eV
Quantum de circulation	$h/2m_e$	$3.63694807 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
	h/m_e	$7.27389614 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

A.6.5 Constantes physico-chimiques

Quantité	Symbole	Valeur
Nombre d'Avogadro	N_A	$6.0221367 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro		10^{23} mol^{-1}
Unité de masse atomique ($\frac{1}{12}m(^{12}\text{C})$) en électron volts ($m_u c^2 / \{e\}$)	m_u	$1.6605402 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 931.49432 MeV
Constante de Faraday	F	$96485.309 \text{ C mol}^{-1}$
Constante de Planck molaire	$N_A h$	$3.99031323 \times 10^{-10} \text{ J s mol}^{-1}$
	$N_A h c$	$0.11962658 \text{ J m mol}^{-1}$
Constant des gaz	R	$8.314510 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k	$1.380658 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
en électron volts		$8.617385 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$
en hertz		$2.083674 \times 10^{10} \text{ Hz K}^{-1}$
Volume molaire (gaz parfait) ^a	V_m	$22.41410 \text{ L mol}^{-1}$
Constante de Loschmidt ^b	n_0	$2.686763 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$
Constante de Loschmidt ^c	V_m	$22.71108 \text{ L mol}^{-1}$
Constante de Sackur-Tetrode ^d	S_0/R	-1.151693
Constante de Sackur-Tetrode ^e		-1.164856
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.67051 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Constante de radiation primaire	c_1	$3.7417749 \times 10^{-16} \text{ W m}^2$
Constante de radiation secondaire	c_2	0.01438769 m K
Constante de Wien	b	$2.897756 \times 10^{-3} \text{ m K}$
Constante de Coulomb	k_0	$8.98755 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$
Constante de perméabilité	$\mu_0/4\pi$	$10^{-7} \text{ T m A}^{-1}$

$$^a T = 273.15 \text{ K}, p = 101325 \text{ Pa}$$

$$^b T = 273.15 \text{ K}, p = 101325 \text{ Pa}$$

$$^c T = 273.15 \text{ K}, p = 100 \text{ kPa}$$

$$^d p_0 = 100 \text{ kPa}$$

$$^e p_0 = 101325 \text{ Pa}$$

A.7 Systèmes de coordonnées

A.7.1 Coordonnées cartésiennes

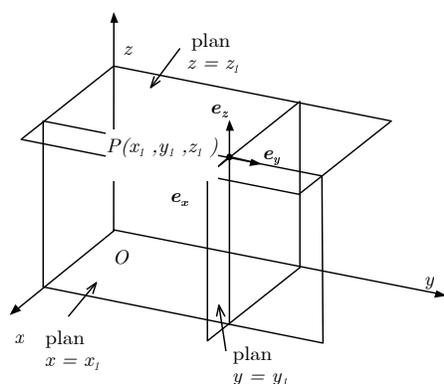


Figure A.1 ◀▶
Système de coordonnées cartésiennes.

Les vecteurs unitaires d'un système de coordonnées cartésiennes $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Un vecteur \mathbf{A} dans ce système de coordonnées s'exprime souvent sous la forme de ses composantes $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ce qui représente la somme vectorielle

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z. \quad (\text{A.2})$$

A. Notations, unités et constantes de physique,...

La métrique g_{ij} détermine comment les éléments de distance sont calculés dans cette base

$$dl^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (\text{A.3})$$

où

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Les éléments de longueur, $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$, de surface, (ds_x, ds_y, ds_z) , et de volume, dv , sont respectivement

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} ds_x &= dy dz \\ ds_y &= dx dz \\ ds_z &= dx dy \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$dv = dx dy dz. \quad (\text{A.7})$$

Remarque A.1

i Dans la littérature, les vecteurs unitaires $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ s'écrivent aussi souvent sous les formes variées

$$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \quad \text{ou} \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \quad \text{ou} \quad \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \quad \text{ou} \quad \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z.$$

i**Opérateurs différentiels:**

Posons des fonctions scalaires et vectorielles

$$\begin{aligned} U &\equiv U(x, y, z) \\ \mathbf{A} &\equiv A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \\ A_x &\equiv A_x(x, y, z) \\ A_y &\equiv A_y(x, y, z) \\ A_z &\equiv A_z(x, y, z) \end{aligned}$$

Gradient:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Laplacien:

$$\Delta U = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Divergence:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rotationnel:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z.$$

A.7.2 Coordonnées cylindriques

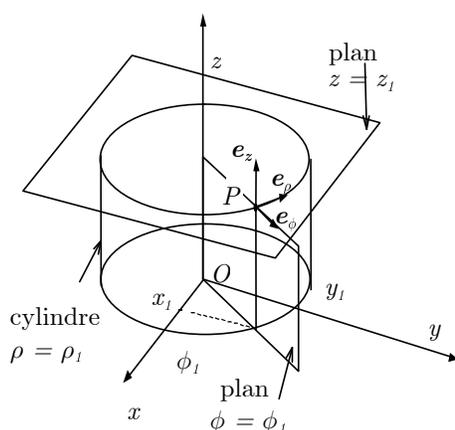


Figure A.2 ◀▶
Système de coordonnées cylindriques

Les vecteurs unitaires d'un système de coordonnées cylindriques $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ ont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\phi &= \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho &= \mathbf{e}_\phi.\end{aligned}\tag{A.8}$$

Un vecteur \mathbf{A} dans ce système de coordonnées s'exprime souvent sous la forme de ses composantes $\mathbf{A} = (A_\rho, A_\phi, A_z)$ ce qui représente la somme vectorielle

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_\rho A_\rho + \mathbf{e}_\phi A_\phi + \mathbf{e}_z A_z.\tag{A.9}$$

La métrique g_{ij} détermine comment les éléments de distance sont calculés dans cette base

$$d\mathbf{l}^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\phi)^2 + (dz)^2\tag{A.10}$$

où

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{A.11}$$

Les éléments de longueur, $d\mathbf{l} = (d\rho, \rho d\phi, dz)$, de surface, (ds_ρ, ds_ϕ, ds_z) , et de volume, dv , sont respectivement

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_\rho d\rho + \mathbf{e}_\phi \rho d\phi + \mathbf{e}_z dz\tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}ds_\rho &= \rho d\phi dz \\ ds_\phi &= d\rho dz \\ ds_z &= \rho d\rho d\phi\end{aligned}\tag{A.13}$$

$$dv = \rho d\rho d\phi dz.\tag{A.14}$$

Les relations de transformations de coordonnées cylindriques à coordonnées cartésiennes sont les suivantes:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z\end{aligned}\tag{A.15}$$

et inversement

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x} \\ z &= z.\end{aligned}\tag{A.16}$$

Opérateurs différentiels:

Posons des fonctions scalaires et vectorielles

$$\begin{aligned}U &\equiv U(\rho, \phi, z) \\ \mathbf{A} &\equiv A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\phi \mathbf{e}_\phi + A_z \mathbf{e}_z \\ A_\rho &\equiv A_x \cos \phi + A_y \sin \phi \\ A_\phi &\equiv -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi\end{aligned}$$

Gradient:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Laplacien:

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Divergence:

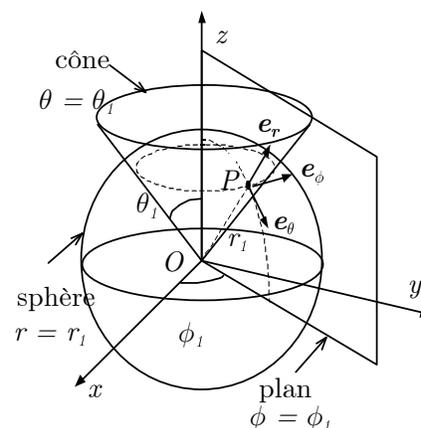
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rotationnel:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\phi + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_z.$$

A.7.3 Coordonnées sphériques

Figure A.3 ◀▶
Système de coordonnées sphériques



Les vecteurs unitaires d'un système de coordonnées sphériques $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ ont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi &= \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\theta.\end{aligned}\tag{A.17}$$

Un vecteur \mathbf{A} dans ce système de coordonnées s'exprime souvent sous la forme de ses composantes $\mathbf{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi)$ ce qui représente la somme vectorielle

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\theta A_\theta + \mathbf{e}_\phi A_\phi. \quad (\text{A.18})$$

La métrique g_{ij} détermine comment les éléments de distance sont calculés dans cette base

$$d\mathbf{l}^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \quad (\text{A.19})$$

où

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Les éléments de longueur, $d\mathbf{l} = (dr, r d\theta, r \sin \theta d\phi)$, de surface, $(ds_r, ds_\theta, ds_\phi)$, et de volume, dv , sont respectivement

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_\phi r \sin \theta d\phi \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} ds_r &= r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ ds_\theta &= r \sin \theta dr d\phi \\ ds_\phi &= r dr d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

Les relations de transformations de coordonnées sphériques à coordonnées cartésiennes sont les suivantes:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

et inversement

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Opérateurs différentiels:

Posons des fonctions scalaires et vectorielles

$$\begin{aligned} U &\equiv U(r, \theta, \phi) \\ \mathbf{A} &\equiv A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\phi \mathbf{e}_\phi \\ A_r &\equiv A_\rho \sin \theta + A_z \cos \theta \\ A_\theta &\equiv A_\rho \cos \theta - A_z \sin \theta \\ A_\phi &\equiv -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi \end{aligned}$$

Gradient:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{(r \sin \theta)} \frac{\partial U}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

Laplacien:

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 U) + \frac{1}{(r^2 \sin \theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{(r^2 \sin^2 \theta)} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$$

Divergence:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 A_r) + \frac{1}{(r \sin \theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{(r \sin \theta)} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Rotationnel:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{(r \sin \theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \frac{1}{(r \sin \theta)} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \mathbf{e}_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial r} (\rho A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\phi. \end{aligned}$$

A.7.4 Coordonnées curvilignes (cas général)

Considérons des coordonnées curvilignes. Un vecteur de position \mathbf{r} dans ce système de coordonnées s'exprime sous la forme de ses composantes $\mathbf{r} = (u_1, u_2, u_3)$ ce qui représente la somme vectorielle

$$\mathbf{r} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3. \quad (\text{A.25})$$

où les composantes sont

$$u_1 = u_1(x, y, z) \quad u_2 = u_2(x, y, z) \quad u_3 = u_3(x, y, z)$$

et les vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ d'un système de coordonnées orthogonal sont définis comme

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \quad \text{avec } h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| \quad \text{et } i = 1, 2, 3$$

tel que

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k \quad \text{avec } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 1\} \text{ ou } \{3, 1, 2\}$$

Un vecteur \mathbf{A} dans ce système de coordonnées s'exprime souvent sous la forme de ses composantes $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ ce qui représente la somme vectorielle

$$\mathbf{A} = \sum_i A_i \mathbf{e}_i = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3. \quad (\text{A.26})$$

L'élément infinitésimal de déplacement s'écrit

$$d\mathbf{r} = \sum_i h_i du_i \mathbf{e}_i = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3$$

Alors, la métrique g_{ij} dans cette base est donnée par

$$d\mathbf{r}^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{A.27})$$

$$= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2 \quad (\text{A.28})$$

$$= \sum_i (h_i du_i)^2 \quad (\text{A.29})$$

où

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.30})$$

Les éléments de longueur, $d\mathbf{l} = (h_1 du_1, h_2 du_2, h_3 du_3)$, de surface, (ds_1, ds_2, ds_3) , et de volume, dv , sont respectivement

$$d\mathbf{l} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} ds_1 &= |(h_2 du_2 \mathbf{e}_2) \times (h_3 du_3 \mathbf{e}_3)| = h_2 h_3 du_2 du_3 \\ ds_2 &= |(h_3 du_3 \mathbf{e}_3) \times (h_1 du_1 \mathbf{e}_1)| = h_3 h_1 du_3 du_1 \\ ds_3 &= |(h_1 du_1 \mathbf{e}_1) \times (h_2 du_2 \mathbf{e}_2)| = h_1 h_2 du_1 du_2 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} dv &= |(h_1 du_1 \mathbf{e}_1) \cdot ((h_2 du_2 \mathbf{e}_2) \times (h_3 du_3 \mathbf{e}_3))| \\ &= h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \end{aligned}$$

Opérateurs différentiels:

Posons des fonctions scalaires et vectorielles

$$\begin{aligned} U &\equiv U(u_1, u_2, u_3) \\ \mathbf{A} &\equiv A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Gradient:

$$\begin{aligned} \nabla U &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial u_3} \mathbf{e}_3 \\ &= \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial U}{\partial u_i} \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Laplacien:

$$\Delta U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial u_3} \right) \right]$$

Divergence:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$

Rotationnel:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

Coordonnées cartésiennes:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1$$

Coordonnées cylindriques:

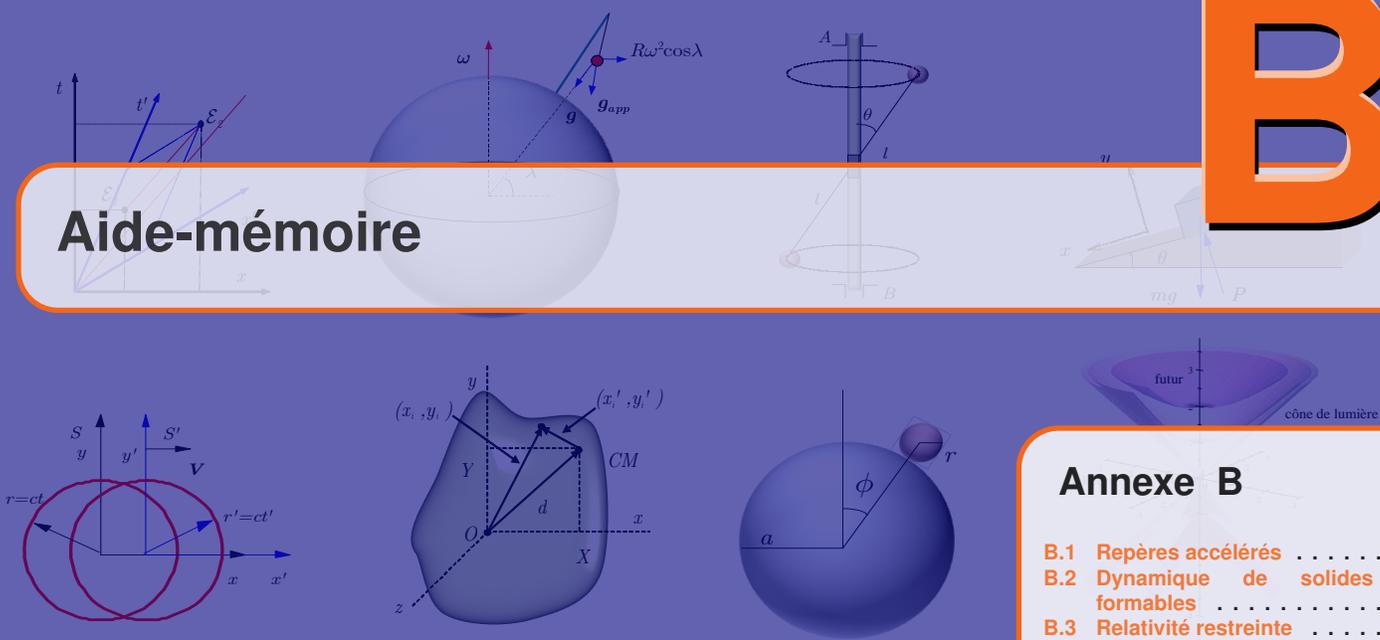
$$h_1 = 1, \quad h_2 = \rho, \quad h_3 = 1$$

Coordonnées sphériques:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \theta$$

B

Aide-mémoire



Annexe B

B.1	Repères accélérés	165
B.2	Dynamique de solides indéformables	165
B.3	Relativité restreinte	167

B.1 Repères accélérés

Transformation : Soit \mathbf{A} et \mathbf{A}' , les composantes du vecteur dans les repères inertiels S et accéléré S' (en rotation) respectivement, on a :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}'$$

Forces physiques et fictives :

$$\mathbf{F}^{\text{res}} - m\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = m\mathbf{a}'$$

où \mathbf{F}^{res} est la résultante des forces physiques

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{azimutale}} &= -m\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' \\ \mathbf{F}_{\text{Coriolis}} &= -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \\ \mathbf{F}_{\text{centrifuge}} &= -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \end{aligned}$$

avec $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}$ = vitesse et accélération angulaire de l'objet en rotation et $\mathbf{r}', \mathbf{v}', \mathbf{a}'$ = position, vitesse et accélération dans le **repère accéléré**.

Force centrifuge dans le repère terrestre :

$$|\mathbf{F}_{\text{centrifuge}}| = m\omega^2 \cos \lambda, \quad \text{pour } \lambda = \text{latitude}$$

$$\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = 2m\boldsymbol{\omega} [\mathbf{e}'_x v'_y \sin \lambda - \mathbf{e}'_y (v'_x \sin \lambda + v'_z \cos \lambda) + \mathbf{e}'_z v'_x \cos \lambda]$$

où les vecteurs unitaires pointent dans les directions \mathbf{e}'_x = sud, \mathbf{e}'_y = est, \mathbf{e}'_z = haut.

B.2 Dynamique de solides indéformables

Moments d'inertie I par rapport à l'axe de symétrie :

Objet	Moment d'inertie I
Tige mince p/r extrémité :	$\frac{1}{3}MR^2$
Tige mince p/r centre :	$\frac{1}{12}MR^2$
Sphère pleine :	$\frac{2}{5}MR^2$
Sphère creuse ou coquille mince :	$\frac{2}{3}MR^2$
Disque ou cylindre plein :	$\frac{1}{2}MR^2$
Cylindre creux ou anneau mince :	MR^2
Anneau épais :	$\frac{1}{2}M(R_{\text{int}}^2 + R_{\text{ext}}^2)$

Dynamique

$$\begin{aligned}\tau &= \dot{\mathbf{L}} = I\alpha \\ \mathbf{L} &= I\omega \\ T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2}I\omega^2\end{aligned}$$

Condition de roulement sans glissement : $v = \omega R$

Théorème des axes parallèles : $I = I_{CM} + M \cdot d^2$

Théorème des plaques minces : $I_z = I_x + I_y$

Constantes usuelles :

Accélération gravitationnelle : $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Rayon terrestre : $R = 6378 \text{ km}$

Vitesse angulaire terrestre : $\omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

B.3 Relativité restreinte

Quelques invariants de Lorentz :

$$\Delta s^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = \text{intervalle}$$

L_0, τ = longueur et temps propre respectivement

$$m_0^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = \text{carré de la masse propre}$$

Tout produit $a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ où a^μ, b^μ = vecteurs de Lorentz

Pour un référentiel S' se déplaçant à vitesse uniforme $\mathbf{V} = V \mathbf{e}_x$ par rapport à S avec

$$\gamma = (1 - V^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Transformations de Lorentz des coordonnées

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - Vx) & t &= \gamma(t' + Vx') \\ x' &= \gamma(x - Vt) & x &= \gamma(x' + Vt') \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= z & z &= z' \end{aligned}$$

Transformations de Lorentz des vitesses

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - v_x V} & v_x &= \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V} \\ v'_y &= \frac{v_y}{\gamma(1 - v_x V)} & v_y &= \frac{v'_y}{\gamma(1 + v'_x V)} \\ v'_z &= \frac{v_z}{\gamma(1 - v_x V)} & v_z &= \frac{v'_z}{\gamma(1 + v'_x V)} \end{aligned}$$

Contraction des longueurs et dilatation du temps

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \quad t = \gamma \tau$$

Impulsion et énergie :

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}) = (\gamma m_0, \gamma m_0 \mathbf{v})$$

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m_0^2$$

$$T = E - m_0 = (\gamma - 1)m_0$$

Transformations de Lorentz de l'énergie-impulsion :

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - V p_x) & E &= \gamma(E' + V p'_x) \\ p'_x &= \gamma(p_x - VE) & p_x &= \gamma(p'_x + VE') \\ p'_y &= p_y & p_y &= p'_y \\ p'_z &= p_z & p_z &= p'_z \end{aligned}$$

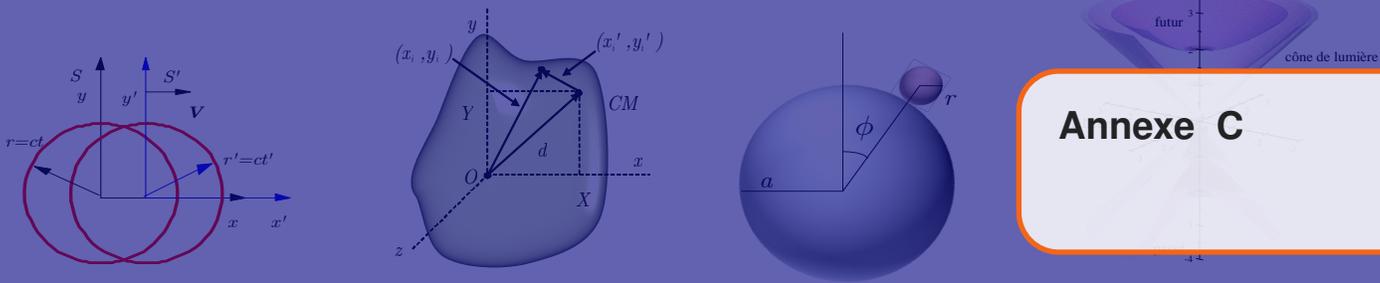
$$1 \text{ GeV} = 10^3 \text{ MeV} = 10^9 \text{ eV}$$

$$1 \text{ eV} = 1.62 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

C

Références



Annexe C

Les notes suivent assez bien les sections correspondantes des volumes suivants et ceux-ci peuvent être utilisés à titre complémentaire.

1. *Mécanique. Berkeley : cours de physique, volume 1*, C. Kittel, W. Knight et M.A. Ruderman, Armand Collin (1965).
2. *Mechanics. Berkeley physics course*, C. Kittel, W. Knight et M.A. Ruderman, McGraw-Hill (1965).

D'autres ouvrages portant sur la relativité peuvent être consultés :

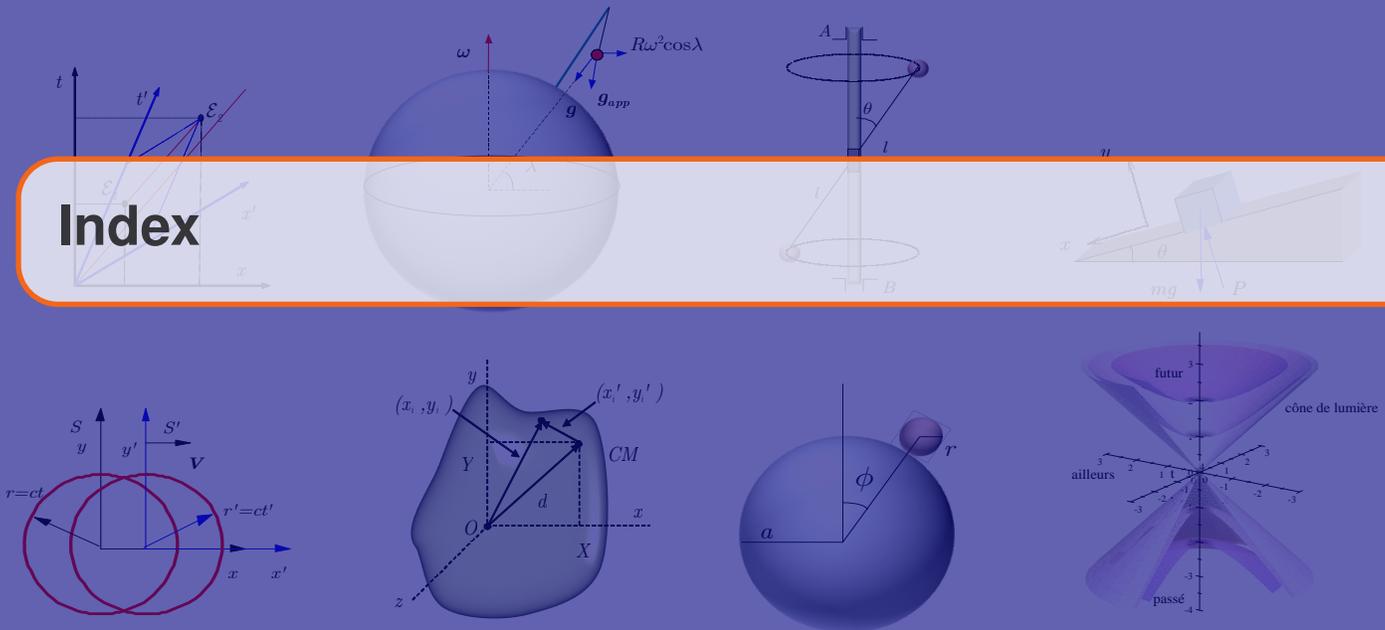
1. *Space-Time Physics*, E. Taylor et J.A. Wheeler, Longmann.
2. *Special Relativity*, A.P. French, Norton.
3. *Introduction to Special Relativity*, R. Resnick, Wiley.
4. *Introduction à la relativité*, J.H. Smith, Éditions Eyrolles.

Les ouvrages suivants se rapportent à la mécanique classique vue dans ces notes :

1. *Classical Mechanics*, J.B. Marion.
2. *Introductory Mechanics*, E.F. Taylor.



Index



A

Abc (cet index) 171
 Accélérateurs de particules 76
 Accélération dans un champ électrique constant 77
 Addition de vitesses 36
 Axes parallèles
 théorème des 130
 Axes perpendiculaires
 théorème des 132

C

Causalité 23
 Centre de masse 124
 vitesse 84
 Cinématique de rotation 133
 Collision inélastique 70
 Composantes covariantes 50
 Conservation de l'énergie 137
 Conservation de l'impulsion 61, 124
 Conservation du moment cinétique 124, 133
 Contraction de l'espace 38
 Coordonnées
 cartésiennes 157
 cylindriques 159
 sphériques 160, 162
 Corps rigide (voir aussi solides) 126
 Cyclones 111

D

Déflexion par un champ électrique 78
 Diagrammes espace-temps 17
 Dilatation du temps 41
 Dynamique d'un ensemble de particules 123
 Dynamique de la rotation 136
 Dynamique des corps rigides solides ... 123
 Dynamique relativiste 61

E

Effet Compton 85
 Effet Doppler
 cas non relativiste 3
 cas relativiste 45
 mouvement longitudinal 45
 mouvement transversal 46
 Effet Doppler 73
 Énergie cinétique 63, 125
 Énergie disponible 84
 Équation de mouvement 133
 Équinoxes 144
 Événements
 Classification des 22
 genre espace 22
 genre lumière 22
 genre temps 22

F

Formalisme quadridimensionnel 48
 Foucault, pendule de 111
 Frottement 92, 135

G

Giration, rayon de 130
 Glissement 135
 Graduation des axes 24
 Gravité apparente 106
 Gyroscope 142
 moment de force 143

H

Horloges accélérées 47

I

Intervalle 19
 Invariance de la charge électrique 75

L

Lorentz
 transformations de 31, 67

M

Métrique 49
 Michelson-Morley, Expérience de 6
 Minkowski, diagrammes de 17
 Moment cinétique 124, 140
 Moments d'inertie 128
 Mouvement 93
 Mouvements observés de la surface de la
 Terre 106
 Mouvements, translation et rotation 135

N

Newton, deuxième loi de 91

O

Observateur 14

P

Particule dans un champ magnétique 80
 Particules de masse nulle 72
 Pendule de Foucault 111
 Percussion et rotation 138
 Plaques minces
 théorème des 132
 Précession 144
 Pression de radiation 73
 Projectile 107

Q

quadrivecteur
 d'énergie-impulsion 63
 de position espace-temps 48

R

Rayon de giration 130
 Récession des galaxies 4
 Relativité restreinte
 et géométrie 17
 limites de la 24
 principes 13
 Repères
 accélérés 91, 93
 accélérés linéairement 94
 en rotation 95, 103
 inertiels 5
 Rotation d'un corps 127
 Roulement 135

S

Seuil de réactions 81
 Source au repos 4
 Source en mouvement 3
 Synchronisation des horloges 14
 Système de coordonnées 18

T

Tenseur métrique 49
 Théorème
 des axes parallèles 130
 des axes perpendiculaires 132
 des plaques minces 132
 Transformation

d'une force	74
de Lorentz	67
Transformations	
de Lorentz	31
Travail, et énergie cinétique	66

V

Vitesse angulaire	140
Vitesse de la lumière	
mesures	1
universalité	14
vitesse ultime	8



Cet ouvrage contient l'essentiel du matériel couvert dans le cours de Mécanique et relativité restreinte (PHY-1003) du Département de physique, de génie physique et d'optique de l'Université Laval dans le cadre de son programme de physique du 1^{er} cycle (B.Sc.). Malgré qu'il existe de nombreux ouvrages sur la mécanique classique, aucun ne répond aux besoins spécifiques de ce cours.

Département de physique, de génie physique et d'optique ★ Université Laval ★ Québec ★ Canada

L. Marleau

